Variabel Acak Diskrit

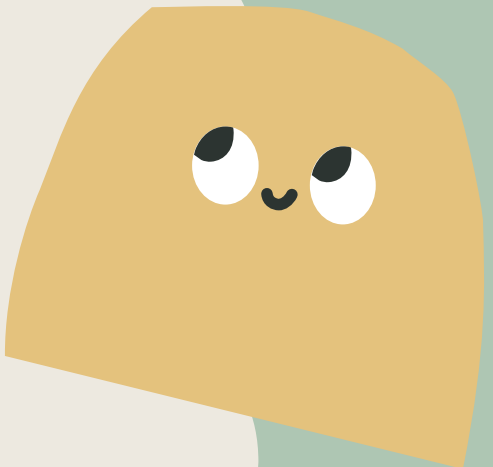
Pengertian Variabel Acak Diskrit

Distribusi Probabilitas Diskrit

Nilai Harapan (Ekspektasi) & Varians

Prof. Dr. Arna fariza, S.Kom., M.Kom.





Topik Bahasan

1. Recap: Probabilitas Dasar
2. Pengertian Variabel Acak
3. Variabel Acak Diskrit vs Kontinu
4. Distribusi Probabilitas Diskrit
5. Sifat-Sifat Distribusi Probabilitas Diskrit
6. Nilai Harapan (Ekspektasi)
7. Varians dan Standar Deviasi
8. Contoh Soal & Aplikasi di Bidang TI
9. Latihan Soal

RECAP PROBABILITAS DASAR

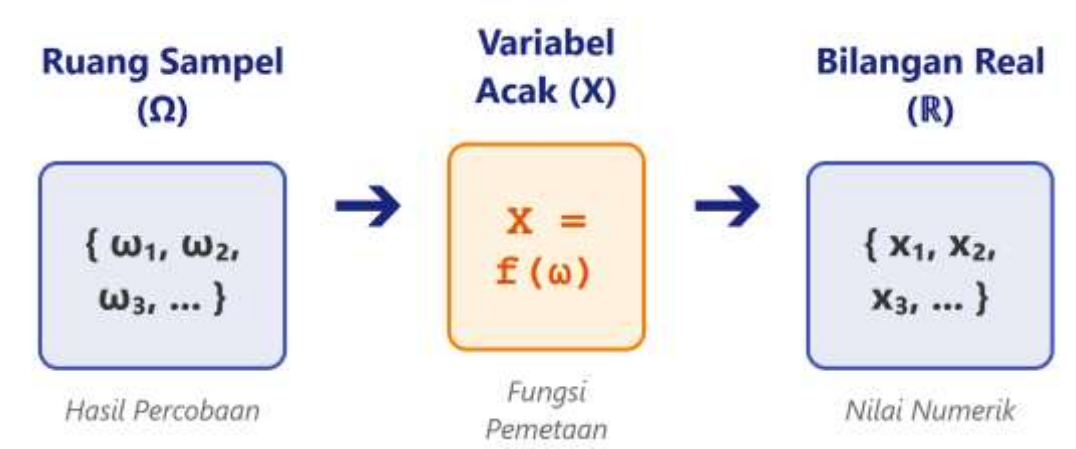
Konsep	Rumus	Keterangan
Probabilitas Klasik	$P(A) = n(A)/n(\Omega)$	Semua hasil sama mungkin
Probabilitas Bersyarat	$P(A\|B) = P(A \cap B)/P(B)$	Peluang A jika B terjadi
Teorema Bayes	$P(A\|B) = P(B\|A) \times P(A)/P(B)$	Posterior dari prior & likelihood
Kaidah Pencacahan	nPr, nCr, n!	Menghitung banyaknya kemungkinan

Bagaimana jika hasil percobaan berupa angka yang nilainya bergantung pada kejadian acak? → perlu konsep Variabel Acak

PENGERTIAN VARIABEL ACAK

Definisi:
Variabel acak (random variable) adalah **fungsi** yang memetakan setiap hasil dalam ruang sampel ke suatu **bilangan real**.

Notasi:
- Variabel acak: **X** (huruf kapital)
- Nilai yang mungkin: **x** (huruf kecil)



Contoh:
Melempar 2 koin. X = jumlah gambar yang muncul.
X memetakan hasil percobaan ke angka: 0, 1, atau 2.

Hasil (ω)	X(ω)
GG	2
GA	1
AG	1
AA	0

VARIABEL ACAK DISKRIT VS KONTINU

Perbedaan Utama:

Variabel Acak Diskrit	Variabel Acak Kontinu
Nilai terbatas atau terhitung (countable)	Nilai dalam rentang tak terbatas (measurable)
Diperoleh dari menghitung	Diperoleh dari mengukur
Contoh: jumlah error, jumlah pengguna	Contoh: waktu respons, suhu, berat
Distribusi: Binomial, Poisson, dll.	Distribusi: Normal, Eksponensial, dll.
P(X = x) > 0 untuk nilai tertentu	P(X = x) = 0 untuk setiap nilai tunggal

Contoh dalam IT:

Diskrit	Kontinu
Jumlah bug dalam 1000 baris kode	Waktu eksekusi program (detik)
Jumlah request per detik	Bandwidth penggunaan (Mbps)
Jumlah pengguna aktif per jam	Suhu CPU (°C)
Jumlah paket data yang hilang	Waktu antar kedatangan paket

DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

Definisi:
Distribusi probabilitas diskrit adalah **daftar semua nilai** yang mungkin dari variabel acak diskrit **beserta probabilitasnya**.

Bentuk Penyajian:
1. Tabel Distribusi Probabilitas

x	x_1	x_2	x_3	...	x□
P(X = x)	p_1	p_2	p_3	...	p□

2. Fungsi Probabilitas (PMF - Probability Mass Function)

$$P(X = x) = p(x)$$

3. Grafik

Diagram batang dengan sumbu X = nilai x, sumbu Y = P(X = x).

Contoh:
Melempar 2 koin. X = jumlah gambar.

x	0	1	2
P(X = x)	1/4	2/4	1/4

SIFAT-SIFAT DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

Sifat 1: Probabilitas Bernilai Antara 0 dan 1

$0 \leq P(X = x) \leq 1$ untuk semua x.

Sifat 2: Jumlah Semua Probabilitas = 1

$\Sigma P(X = x) = 1$

Sifat 3: Probabilitas Kumulatif

$P(X \leq x) = \Sigma P(X = k)$ untuk $k \leq x$

Contoh Pengecekan:

✓ Semua probabilitas antara 0 dan 1.

✓ Jumlah = 1.

Probabilitas Kumulatif:

- $P(X \leq 0) = P(X=0) = 1/4 = 0.25$
- $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 1/4 + 2/4 = 3/4 = 0.75$
- $P(X \leq 2) = 1$

x	0	1	2	Total
P(X = x)	1/4	2/4	1/4	4/4 = 1

CONTOH DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

Contoh: Melempar 1 Dadu

X = mata dadu yang muncul.

Ruang sampel: Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

Distribusi Probabilitas:

x	1	2	3	4	5	6
P(X = x)	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Cek: Σ P(X = x) = 6 × 1/6 = 1 ✓

Probabilitas Kumulatif:

x	1	2	3	4	5	6
P(X ≤ x)	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1

Pertanyaan:

a) P(X = 4) = 1/6 ≈ 0.167

b) P(X ≤ 4) = 4/6 ≈ 0.667

c) P(X > 4) = 1 - P(X ≤ 4) = 2/6 ≈ 0.333

NILAI HARAPAN (EKSPEKTASI) - DEFINISI

Definisi:
Nilai harapan (expected value) dari variabel acak diskrit X adalah **rata-rata tertimbang** dari semua nilai X dengan probabilitasnya.

Notasi: E(X) atau μ

Rumus:

$$E(X) = \Sigma [x \times P(X = x)]$$

Interpretasi:
Nilai harapan adalah nilai **rata-rata jangka panjang** jika percobaan diulang berkali-kali.

Contoh Sederhana:
Melempar 1 dadu. $E(X) = \Sigma [x \times 1/6] = (1+2+3+4+5+6)/6 = 21/6 =$ **3.5**
Makna: Jika melempar dadu berkali-kali, rata-rata hasilnya adalah 3.5 (meskipun 3.5 bukan nilai yang mungkin muncul).

NILAI HARAPAN - CONTOH

Contoh: Melempar 2 Koin

X = jumlah gambar yang muncul.

x	0	1	2
P(X = x)	1/4	2/4	1/4

Hitung E(X):

$$E(X) = (0 \times 1/4) + (1 \times 2/4) + (2 \times 1/4)$$
$$= 0 + 2/4 + 2/4$$
$$= 4/4$$
$$= \mathbf{1}$$

Interpretasi: Rata-rata jumlah gambar yang muncul dalam jangka panjang adalah 1.

NILAI HARAPAN - CONTOH

Contoh: Analisis Bug Software

X = jumlah bug dalam modul software.

P(X=0) = 0.5, P(X=1) = 0.3, P(X=2) = 0.15, P(X=3) = 0.05

$$E(X) = (0\times0.5) + (1\times0.3) + (2\times0.15) + (3\times0.05)$$
$$= 0 + 0.3 + 0.3 + 0.15 = \mathbf{0.75}$$

Interpretasi: Rata-rata ada 0.75 bug per modul.

SIFAT-SIFAT NILAI HARAPAN

Sifat 1: Ekspektasi Konstanta $E(c) = c$

Sifat 2: Ekspektasi Linear $E(aX + b) = a \times E(X) + b$

Sifat 3: Ekspektasi Jumlah $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Sifat 4: Ekspektasi Perkalian (jika independen) $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$ (jika X dan Y independen)

Contoh Penerapan:

Jika X = jumlah bug, E(X) = 0.75.
Biaya perbaikan bug = Rp 100.000 per bug + biaya tetap Rp 50.000.
Total biaya: Y = 100.000X + 50.000
E(Y) = 100.000 × E(X) + 50.000 = 100.000 × 0.75 + 50.000 = **Rp 125.000**

VARIANS DAN STANDAR DEVIASI - DEFINISI

Varians (Var(X) atau σ^2) Ukuran penyebaran nilai-nilai X di sekitar nilai harapannya.

Rumus: $Var(X) = E[(X - \mu)^2] = \Sigma [(x - \mu)^2 \times P(X = x)]$

Rumus Alternatif (lebih mudah dihitung): $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Standar Deviasi (σ): $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

Interpretasi:

- Varians kecil → nilai X mengumpul di sekitar mean
- Varians besar → nilai X menyebar jauh dari mean

VARIANS - CONTOH PERHITUNGAN

Contoh: Melempar 2 Koin

X = jumlah gambar. Distribusi: P(0)=1/4, P(1)=2/4, P(2)=1/4

E(X) = 1

Hitung $E(X^2)$:

$E(X^2) = \Sigma [x^2 \times P(X = x)]$

$= (0^2 \times 1/4) + (1^2 \times 2/4) + (2^2 \times 1/4)$

$= 0 + 2/4 + 4/4$

$= 6/4 =$ **1.5**

Hitung Varians:

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$= 1.5 - (1)^2$

$= 1.5 - 1$

$=$ **0.5**

Hitung Standar Deviasi:

$\sigma = \sqrt{0.5} \approx$ **0.707**

Interpretasi: Penyebaran jumlah gambar dari mean (1) adalah sekitar 0.707.

VARIANS - CONTOH IT

Contoh: Jumlah Error dalam Transmisi Data

X = jumlah error per 1000 bit.

Distribusi:

x	0	1	2	3
P(X = x)	0.6	0.25	0.1	0.05

Langkah 1: Hitung E(X)

$E(X) = (0\times0.6) + (1\times0.25) + (2\times0.1) + (3\times0.05)$

$= 0 + 0.25 + 0.2 + 0.15 =$ **0.6**

Langkah 2: Hitung $E(X^2)$

$E(X^2) = (0^2\times0.6) + (1^2\times0.25) + (2^2\times0.1) + (3^2\times0.05)$

$= 0 + 0.25 + 0.4 + 0.45 =$ **1.1**

Langkah 3: Hitung Varians

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1.1 - (0.6)^2 = 1.1 - 0.36 =$ **0.74**

Langkah 4: Standar Deviasi

$\sigma = \sqrt{0.74} \approx$ **0.86**

Interpretasi: Rata-rata error 0.6 per 1000 bit, dengan penyebaran sekitar 0.86.

RINGKASAN FORMULA

Ukuran	Rumus	Keterangan
Distribusi Probabilitas	$P(X = x)$	Probabilitas X mengambil nilai x
Sifat	$\Sigma P(X = x) = 1$	Total probabilitas = 1
Nilai Harapan	$E(X) = \Sigma [x \times P(X = x)]$	Rata-rata tertimbang
Ekspektasi X^2	$E(X^2) = \Sigma [x^2 \times P(X = x)]$	Untuk hitung varians
Varians	$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$	Ukuran penyebaran
Standar Deviasi	$\sigma = \sqrt{Var(X)}$	Akar varians

Langkah Perhitungan:

1. Buat tabel distribusi probabilitas.
2. Hitung $E(X) = \Sigma\, x \cdot P(x)$.
3. Hitung $E(X^2) = \Sigma\, x^2 \cdot P(x)$.
4. Hitung $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.
5. Hitung $\sigma = \sqrt{Var(X)}$.

APLIKASI DI BIDANG TEKNIK INFORMATIKA

1. Analisis Kinerja Sistem
X = jumlah request per detik.
E(X) = rata-rata beban server.
Var(X) = stabilitas beban (varians kecil = stabil).
2. Keamanan Jaringan
X = jumlah serangan per jam.
E(X) = rata-rata serangan.
Var(X) = fluktuasi serangan.
3. Pengujian Perangkat Lunak
X = jumlah bug per modul.
E(X) = rata-rata bug.
Var(X) = konsistensi kualitas modul.

4. Komunikasi Data
X = jumlah paket hilang per 1000 paket.
E(X) = rata-rata packet loss.
Var(X) = variasi kualitas jaringan.
5. Sistem Antrian
X = jumlah pelanggan dalam antrian.
E(X) = rata-rata panjang antrian.
Var(X) = fluktuasi antrian.

CONTOH KASUS TERAPAN

Kasus: Analisis Bug dalam Modul Software
Sebuah tim QA menemukan distribusi bug per modul sebagai berikut:

Jumlah Bug (x)	Probabilitas
0	0.40
1	0.30
2	0.20
3	0.10

Pertanyaan:
a) Berapa rata-rata bug per modul?
b) Berapa varians dan standar deviasi?
c) Jika biaya perbaikan Rp 200.000 per bug, berapa ekspektasi biaya per modul?

CONTOH KASUS TERAPAN

Penyelesaian:

a) $E(X) = (0\times0.4) + (1\times0.3) + (2\times0.2) + (3\times0.1) = 0 + 0.3 + 0.4 + 0.3 =$ **1.0**

b) $E(X^2) = (0^2\times0.4) + (1^2\times0.3) + (2^2\times0.2) + (3^2\times0.1) = 0 + 0.3 + 0.8 + 0.9 = 2.0$

$Var(X) = 2.0 - (1.0)^2 = 2.0 - 1.0 =$ **1.0**

$\sigma = \sqrt{1.0} =$ **1.0**

c) Biaya = 200.000 × X

E(Biaya) = 200.000 × E(X) = 200.000 × 1.0 = **Rp 200.000**

LATIHAN SOAL

Soal 1:
Sebuah variabel acak diskrit X memiliki distribusi:

x	1	2	3	4
P(X=x)	0.2	0.3	0.4	0.1

Hitunglah:
a) E(X)
b) $E(X^2)$
c) Var(X)
d) σ

LATIHAN SOAL

Soal 2:
Sebuah server menerima jumlah request per detik dengan distribusi:

Request (x)	0	1	2	3
P(X=x)	0.1	0.4	0.3	0.2

Hitunglah:
a) Rata-rata request per detik
b) Varians dan standar deviasi
c) Jika kapasitas server 2 request/detik, berapa peluang server overload (X > 2)?

LATIHAN SOAL

Soal 3:
Dalam sebuah game, pemain mendapat skor X dengan distribusi:

Skor (x)	10	20	50	100
P(X=x)	0.5	0.3	0.15	0.05

Hitunglah ekspektasi skor dan variansnya!

KESIMPULAN

1. **Variabel Acak** adalah fungsi yang memetakan hasil percobaan ke bilangan real.
2. **Variabel Acak Diskrit** memiliki nilai terbatas/terhitung.
3. **Distribusi Probabilitas Diskrit** adalah daftar nilai dan probabilitasnya.
   Sifat: $0 \leq P(X=x) \leq 1$ dan $\Sigma P(X=x) = 1$.
4. **Nilai Harapan E(X)** = $\Sigma [x \times P(X=x)] \rightarrow$ rata-rata jangka panjang.
5. **Varians Var(X)** = $E(X^2) - [E(X)]^2 \rightarrow$ ukuran penyebaran.
6. **Standar Deviasi σ** = $\sqrt{Var(X)}$.

TUGAS

Soal 1:
Sebuah variabel acak diskrit X memiliki distribusi:

x	0	1	2	3	4
P(X=x)	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

Hitunglah:
a) E(X)
b) $E(X^2)$
c) Var(X)
d) σ

TUGAS

Soal 2:
Sebuah aplikasi memiliki jumlah crash per hari dengan distribusi:

Crash (x)	0	1	2	3
P(X=x)	0.5	0.3	0.15	0.05

a) Berapa rata-rata crash per hari?
b) Berapa varians dan standar deviasi?
c) Jika target maksimal 1 crash per hari, berapa peluang melebihi target?

TUGAS

Soal 3:
Dalam sebuah game, pemain mendapat hadiah X (dalam ribuan rupiah):

Hadiah (x)	0	10	50	100
P(X=x)	0.6	0.25	0.1	0.05

Hitung ekspektasi hadiah dan variansnya!