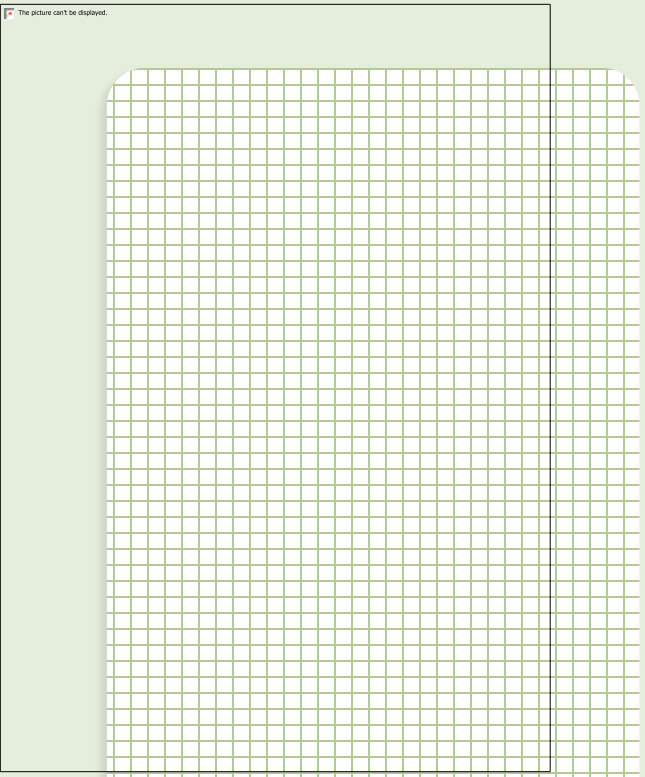
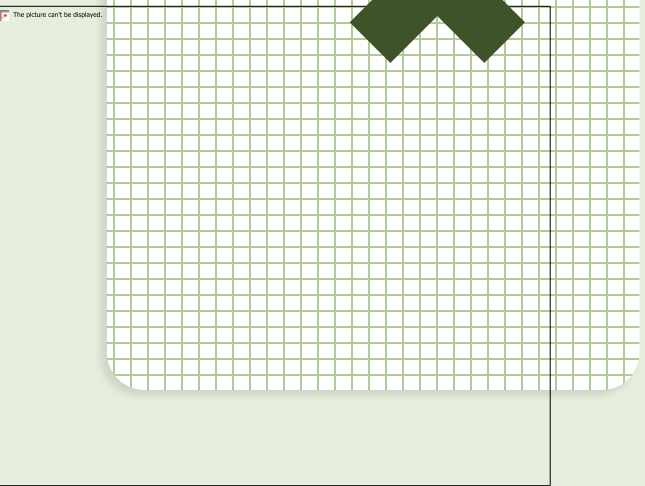



DISTRIBUSI DISKRIT KHUSUS

Prof Dr. Arna Fariza, S.Kom., M.Kom.

Topik Bahasan

1. Recap: Variabel Acak Diskrit
2. Pengantar Distribusi Diskrit Khusus
3. Distribusi Binomial
    - Konsep & Karakteristik
    - Rumus & Contoh Soal
    - Aplikasi di Bidang IT
4. Distribusi Poisson
    - Konsep & Karakteristik
    - Rumus & Contoh Soal
    - Aplikasi di Bidang IT
5. Perbandingan Binomial vs Poisson
6. Latihan Soal & Studi Kasus
7. Kesimpulan

RECAP - VARIABEL ACAK DISKRIT

Konsep yang Sudah Dipelajari:

Konsep	**Rumus**	**Keterangan**
Variabel Acak Diskrit	X	Nilai terbatas/terhitung
Distribusi Probabilitas	$P(X = x)$	Probabilitas setiap nilai X
Nilai Harapan	$E(X) = \Sigma [x \times P(X=x)]$	Rata-rata jangka panjang
Varians	$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$	Ukuran penyebaran

Pertanyaan:
Bagaimana jika percobaan memiliki pola tertentu (misalnya: sukses/gagal, atau kejadian dalam interval waktu)? Kita memerlukan **Distribusi Probabilitas Khusus**!

PENGANTAR DISTRIBUSI DISKRIT KHUSUS

Dua Distribusi Diskrit yang Paling Penting:

Distribusi Binomial	**Distribusi Poisson**
Menghitung jumlah sukses dalam n percobaan	Menghitung jumlah kejadian dalam interval waktu/ruang
Percobaan Bernoulli (2 hasil)	Kejadian langka (rare events)
Contoh IT: Konversi iklan, bug dalam kode	Contoh IT: Request error, serangan siber

Mengapa Penting untuk Teknik Informatika?

- **Analisis Kinerja Sistem:** Memodelkan jumlah error, request, atau kegagalan.
- **Keamanan Jaringan:** Memprediksi jumlah serangan atau paket hilang.
- **Machine Learning:** Dasar untuk model klasifikasi (Naive Bayes).
- **Rekayasa Perangkat Lunak:** Estimasi jumlah bug atau kepuasan pengguna.

DISTRIBUSI BINOMIAL - DEFINISI

Definisi:
Distribusi Binomial digunakan untuk menghitung peluang x **keberhasilan** dalam n **percobaan independen**, di mana setiap percobaan hanya memiliki dua kemungkinan hasil (sukses/gagal) dengan peluang sukses $p$yang tetap.

Karakteristik (Percobaan Bernoulli):
1. Percobaan dilakukan sebanyak n **kali** (jumlah tetap).
2. Setiap percobaan hanya memiliki **2 hasil**: Sukses atau Gagal.
3. Peluang sukses $p$selalu **sama** di setiap percobaan.
4. Setiap percobaan **independen** (saling bebas).

Notasi:

$$X \sim B(n, p)$$

- X= jumlah sukses
- n= jumlah percobaan
- p= peluang sukses

DISTRIBUSI BINOMIAL - RUMUS

Fungsi Probabilitas Binomial (PMF):

$$P(X = x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{n-x}$$

Keterangan:

- $P(X = x)$ = peluang $x$sukses dari $n$percobaan
- $\binom{n}{x} = C(n, x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}$= kombinasi
- p = peluang sukses
- $(1 - p)$ = peluang gagal
- x = jumlah sukses yang diinginkan (0, 1, 2, ..., n)

Nilai Harapan & Varians:

- $E(X) = n \cdot p$
- $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p)$

CONTOH SOAL - BINOMIAL

Soal:
Sebuah dadu dilempar sebanyak 5 kali. Berapa peluang munculnya mata dadu 6 tepat sebanyak 2 kali?

Penyelesaian:
- $n = 5$ (jumlah lemparan)
- $p = 1/6$ (peluang muncul mata dadu 6)
- $x = 2$ (jumlah sukses yang diinginkan)

$$P(X = 2) = \binom{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

Langkah Perhitungan:
1. $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$
2. $(1/6)^2 = 1/36 \approx 0.0278$
3. $(5/6)^3 = 125/216 \approx 0.5787$

$P(X = 2) = 10 \times 0.0278 \times 0.5787 \approx 0.1608$ atau **16.08%**

APLIKASI BINOMIAL DI BIDANG IT

Kasus 1: Peluang Konversi Iklan (A/B Testing)
Sebuah aplikasi e-commerce menampilkan iklan kepada 10 pengguna. Berdasarkan data historis, peluang seorang pengguna mengklik iklan dan melakukan pembelian (konversi) adalah 20%.

Pertanyaan:
Berapa peluang tepat 3 pengguna melakukan konversi?

Penyelesaian:
- $n = 10$ (jumlah pengguna)
- $p = 0.2$ (peluang konversi)
- $x = 3$ (jumlah konversi yang diinginkan)

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} \cdot (0.2)^3 \cdot (0.8)^7$$

$P(X = 3) = 120 \cdot 0.008 \cdot 0.2097 \approx 0.2013$ atau **20.13%**

Interpretasi:
Peluang tepat 3 dari 10 pengguna melakukan konversi adalah 20.13%. Informasi ini berguna untuk mengestimasi ROI (*Return on Investment*) kampanye iklan.

APLIKASI BINOMIAL DI BIDANG IT

Kasus 2: Deteksi Bug dalam Modul Software

Sebuah tim QA menguji 20 modul software. Peluang sebuah modul memiliki bug adalah 10%. Berapa peluang **paling banyak 2 modul** memiliki bug?

Penyelesaian:

- $n = 20, p = 0.1$
- $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

1. $P(X = 0) = \binom{20}{0}(0.1)^0(0.9)^{20} = 1 \times 1 \times 0.1216 = 0.1216$
2. $P(X = 1) = \binom{20}{1}(0.1)^1(0.9)^{19} = 20 \times 0.1 \times 0.1351 = 0.2702$
3. $P(X = 2) = \binom{20}{2}(0.1)^2(0.9)^{18} = 190 \times 0.01 \times 0.1501 = 0.2852$

$P(X \leq 2) = 0.1216 + 0.2702 + 0.2852 = 0.677$ atau **67.7%**

Interpretasi:

Ada peluang 67.7% bahwa maksimal 2 modul memiliki bug. Tim QA dapat mengalokasikan sumber daya untuk pengujian berdasarkan estimasi ini.

DISTRIBUSI POISSON - DEFINISI

Definisi:
Distribusi Poisson digunakan untuk menghitung peluang terjadinya x **kejadian** dalam suatu **interval waktu atau ruang** tertentu, ketika kejadian tersebut terjadi secara acak dan independen dengan **rata-rata laju kejadian (λ) yang konstan**.

Karakteristik:
1. Menghitung jumlah kejadian dalam interval (waktu, area, volume).
2. Kejadian terjadi secara acak dan independen.
3. Rata-rata laju kejadian (λ) konstan.
4. Peluang kejadian dalam interval sangat kecil.
5. Kejadian langka (*rare events*).

Notasi:

$$X \sim Poisson(\lambda)$$

- X= jumlah kejadian
- λ (lambda) = rata-rata jumlah kejadian per interval

DISTRIBUSI POISSON - RUMUS

Fungsi Probabilitas Poisson (PMF):

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

Keterangan:

- $P(X = x)$= peluang terjadi $x$kejadian
- e= bilangan Euler ($e \approx 2.71828$)
- λ= rata-rata jumlah kejadian per interval
- x= jumlah kejadian yang diinginkan (0, 1, 2, ...)
- $x!$= faktorial dari x

Nilai Harapan & Varians:

- $E(X) = \lambda$
- $Var(X) = \lambda$

Catatan Penting:

Dalam Poisson, **Mean = Varians =** λ

CONTOH SOAL - POISSON

Soal:
Sebuah call center menerima rata-rata 5 panggilan per menit. Berapa peluang menerima tepat 3 panggilan dalam satu menit?

Penyelesaian:
- $\lambda = 5$ (rata-rata panggilan per menit)
- $x = 3$ (jumlah panggilan yang diinginkan)

$$P(X = 3) = \frac{e^{-5} \cdot 5^3}{3!}$$

Langkah Perhitungan:
1. $e^{-5} \approx 0.006738$
2. $5^3 = 125$
3. $3! = 6$

$P(X = 3) = \frac{0.006738 \times 125}{6} = \frac{0.84225}{6} \approx 0.1404$ atau **14.04%**

APLIKASI POISSON DI BIDANG IT

Kasus 1: Jumlah Request Error pada Server
Sebuah server web rata-rata mengalami 4 request error per menit. Berapa peluang terjadi **tepat 2 error** dalam satu menit?

Penyelesaian:
- $\lambda = 4$ (rata-rata error per menit)
- $x = 2$ (jumlah error yang diinginkan)

$$P(X = 2) = \frac{e^{-4} \cdot 4^2}{2!}$$

Langkah Perhitungan:
1. $e^{-4} \approx 0.0183$
2. $4^2 = 16$
3. $2! = 2$

$P(X = 2) = \frac{0.0183 \times 16}{2} = \frac{0.2928}{2} \approx 0.1464$ atau **14.64%**

Interpretasi:
Peluang server mengalami tepat 2 error dalam satu menit adalah 14.64%.

APLIKASI POISSON DI BIDANG IT

Kasus 2: Serangan Siber (DDoS)
Sebuah sistem keamanan mendeteksi rata-rata 10 upaya serangan DDoS per jam. Berapa peluang terjadi **lebih dari 12 serangan** dalam satu jam?

Penyelesaian:
- $\lambda = 10$ (rata-rata serangan per jam)
- $P(X > 12) = 1 - P(X \leq 12)$

Menggunakan tabel Poisson atau perhitungan:
$P(X \leq 12) \approx 0.7916$ (dari tabel Poisson kumulatif)
$P(X > 12) = 1 - 0.7916 = 0.2084$ atau **20.84%**

Interpretasi:
Ada peluang 20.84% terjadi lebih dari 12 serangan dalam satu jam. Sistem keamanan harus siap untuk skenario ini (misalnya dengan *auto-scaling* atau *rate limiting*).

Tabel Poisson Kumulatif (Potongan)

x	\(\lambda = 8\)	\(\lambda = 9\)	\(\lambda = 10\)	\(\lambda = 11\)	\(\lambda = 12\)
8	0.5925	0.4557	0.3328	0.2320	0.1550
9	0.7166	0.5874	0.4579	0.3405	0.2424
10	0.8159	0.7059	0.5830	0.4599	0.3472
11	0.8881	0.8030	0.6968	0.5793	0.4615
12	0.9362	0.8758	0.7916	0.6887	0.5760
13	0.9658	0.9262	0.8645	0.7813	0.6815
14	0.9827	0.9585	0.9165	0.8540	0.7720

PERBANDINGAN BINOMIAL VS POISSON

Aspek	Distribusi Binomial	Distribusi Poisson
Fokus	**Jumlah sukses dari npercobaan**	**Jumlah kejadian dalam interval**
Parameter	n(jumlah percobaan), p(peluang sukses)	λ(rata-rata kejadian)
Syarat	$n$tetap, $p$konstan, independen	Kejadian acak, independen, laju konstan
Nilai X	0, 1, 2, ..., n(terbatas)	0, 1, 2, ... (tak terbatas)
Mean	$n \cdot p$	λ
Varians	$n \cdot p \cdot (1-p)$	λ
Contoh IT	Konversi iklan, bug modul	Request error, serangan siber

Kapan Menggunakan Poisson sebagai Pendekatan Binomial?
Jika n sangat besar dan p sangat kecil, maka Binomial dapat didekati dengan Poisson dengan $\lambda = n \cdot p$. (Aturan praktis: $n \geq 20$ dan $p \leq 0.05$).

STUDI KASUS TERAPAN

Kasus: Analisis Kinerja Aplikasi Mobile

Sebuah aplikasi mobile memiliki data sebagai berikut:

- **Konversi Iklan:** Peluang pengguna mengklik iklan adalah 15%. Jika ada 20 pengguna yang melihat iklan, berapa peluang tepat 4 pengguna mengklik?
- **Error Server:** Rata-rata terjadi 3 error per menit. Berapa peluang terjadi 5 error dalam satu menit?

Penyelesaian 1 (Binomial):

$$n = 20, p = 0.15, x = 4$$

$$P(X = 4) = \binom{20}{4} \cdot (0.15)^4 \cdot (0.85)^{16}$$

$P(X = 4) = 4845 \cdot 0.000506 \cdot 0.0742 \approx 0.182$ atau **18.2%**

Penyelesaian 2 (Poisson):

$$\lambda = 3, x = 5$$

$P(X = 5) = \frac{e^{-3} \cdot 3^5}{5!} = \frac{0.0498 \times 243}{120} \approx 0.1008$atau **10.08%**

LATIHAN SOAL

Soal 1 (Binomial):
Sebuah algoritma enkripsi memiliki peluang berhasil memecahkan kode sebesar 30%. Jika algoritma dijalankan 8 kali, berapa peluang berhasil tepat 3 kali?

Soal 2 (Poisson):
Sebuah router jaringan rata-rata menerima 6 paket yang rusak (corrupt) per menit. Berapa peluang menerima tepat 4 paket rusak dalam satu menit?

Soal 3 (Aplikasi IT):
Sebuah *startup* memiliki 15 investor potensial. Peluang seorang investor menyetujui pendanaan adalah 40%. Berapa peluang *startup* tersebut mendapatkan persetujuan dari **minimal 10 investor**?

Soal 4 (Aplikasi IT):
Sebuah *database* mengalami *deadlock* rata-rata 2 kali per jam. Berapa peluang terjadi **lebih dari 3 deadlock** dalam satu jam?

JAWABAN LATIHAN SOAL

Jawaban Soal 1 (Binomial):

$$n = 8, p = 0.3, x = 3$$

$P(X = 3) = \binom{8}{3}(0.3)^3(0.7)^5 = 56 \times 0.027 \times 0.16807 \approx 0.254$ atau **25.4%**

Jawaban Soal 2 (Poisson):

$$\lambda = 6, x = 4$$

$P(X = 4) = \frac{e^{-6} \cdot 6^4}{4!} = \frac{0.002479 \times 1296}{24} \approx 0.1339$ atau **13.39%**

Jawaban Soal 3 (Binomial):

$n = 15, p = 0.4$, $P(X \geq 10) = P(10) + P(11) + P(12) + P(13) + P(14) + P(15)$

$P(X \geq 10) \approx 0.0006 + 0.0001 + 0.0000 + \ldots \approx 0.0007$ atau **0.07%** (sangat kecil)

(Gunakan tabel binomial kumulatif untuk hasil presisi)

Jawaban Soal 4 (Poisson):

$$\lambda = 2$$

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3)]$$

$$P(X \leq 3) \approx 0.1353 + 0.2707 + 0.2707 + 0.1804 = 0.8571$$

$P(X > 3) = 1 - 0.8571 = 0.1429$ atau **14.29%**

RINGKASAN MATERI

1. **Distribusi Binomial** digunakan untuk menghitung jumlah sukses dalam $n$percobaan independen dengan peluang sukses p.
   - Rumus: $P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
   - Mean: $n \cdot p$ | Varians: $n \cdot p \cdot (1-p)$
2. **Distribusi Poisson** digunakan untuk menghitung jumlah kejadian dalam interval waktu/ruang dengan rata-rata λ.
   - Rumus: $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$
   - Mean = Varians = λ
3. **Aplikasi di IT:**
   - Binomial: Konversi iklan, bug software, A/B testing.
   - Poisson: Request error, serangan siber, paket hilang.

TUGAS

Soal 1:
Sebuah aplikasi memiliki peluang *crash* sebesar 5% setiap kali dijalankan. Jika aplikasi dijalankan 12 kali, berapa peluang aplikasi mengalami *crash* tepat 2 kali?

Soal 2:
Sebuah server menerima rata-rata 8 *request* per detik. Berapa peluang server menerima tepat 10 *request* dalam satu detik?

Soal 3:
Sebuah sistem keamanan mendeteksi rata-rata 5 upaya *phishing* per hari. Berapa peluang sistem mendeteksi **kurang dari 3 upaya phishing** dalam satu hari?

Soal 4 (Aplikasi IT):
Sebuah *website* memiliki 100 pengunjung per hari. Peluang seorang pengunjung melakukan pembelian adalah 5%. Berapa peluang *website* mendapatkan **lebih dari 7 pembelian** dalam satu hari? (Gunakan Binomial atau pendekatan Poisson).