

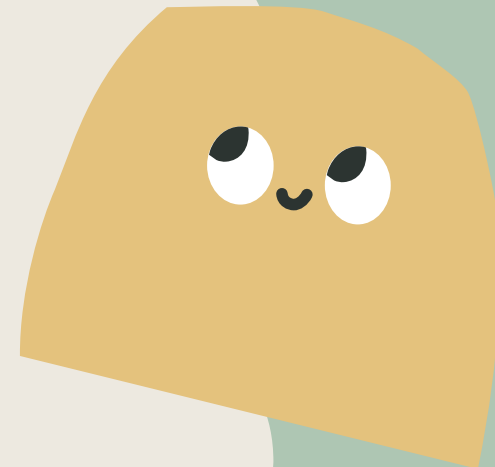
Variabel Acak Diskrit

Pengertian Variabel Acak

Distribusi Probabilitas Diskrit

Nilai Harapan (Ekspektasi) & Varians

Prof. Dr. Arna fariza, S.Kom., M.Kom.



Topik Bahasan

1. Recap: Probabilitas Dasar
2. Pengertian Variabel Acak
3. Variabel Acak Diskrit vs Kontinu
4. Distribusi Probabilitas Diskrit
5. Sifat-Sifat Distribusi Probabilitas Diskrit
6. Nilai Harapan (Ekspektasi)
7. Varians dan Standar Deviasi
8. Contoh Soal & Aplikasi di Bidang TI
9. Latihan Soal

RECAP PROBABILITAS DASAR

Konsep	Rumus	Keterangan
Probabilitas Klasik	$P(A) = n(A)/n(\Omega)$	Semua hasil sama mungkin
Probabilitas Bersyarat	$P(A B) = P(A \cap B)/P(B)$	Peluang A jika B terjadi
Teorema Bayes	$P(A B) = P(B A) \times P(A)/P(B)$	Posterior dari prior & likelihood
Kaidah Pencacahan	$nPr, nCr, n!$	Menghitung banyaknya kemungkinan

Bagaimana jika hasil percobaan berupa angka yang nilainya bergantung pada kejadian acak? → perlu konsep Variabel Acak

PENGERTIAN VARIABEL ACAK

Definisi:

Variabel acak (random variable) adalah **fungsi** yang memetakan setiap hasil dalam ruang sampel ke suatu **bilangan real**.

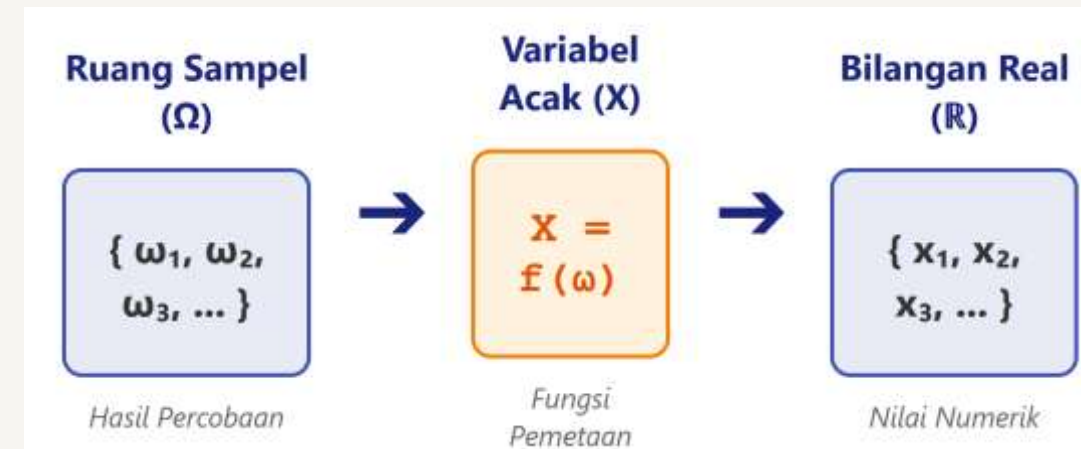
Notasi:

- Variabel acak: **X** (huruf kapital)
- Nilai yang mungkin: **x** (huruf kecil)

Contoh:

Melempar 2 koin. X = jumlah gambar yang muncul.
 X memetakan hasil percobaan ke angka: 0, 1, atau 2.

Hasil (ω)	$X(\omega)$
GG	2
GA	1
AG	1
AA	0



VARIABEL ACAK DISKRIT VS KONTINU

Perbedaan Utama:

Variabel Acak Diskrit	Variabel Acak Kontinu
Nilai terbatas atau terhitung (countable)	Nilai dalam rentang tak terbatas (measurable)
Diperoleh dari menghitung	Diperoleh dari mengukur
Contoh: jumlah error, jumlah pengguna	Contoh: waktu respons, suhu, berat
Distribusi: Binomial, Poisson, dll.	Distribusi: Normal, Eksponensial, dll.
$P(X = x) > 0$ untuk nilai tertentu	$P(X = x) = 0$ untuk setiap nilai tunggal

Contoh dalam IT:

Diskrit	Kontinu
Jumlah bug dalam 1000 baris kode	Waktu eksekusi program (detik)
Jumlah request per detik	Bandwidth penggunaan (Mbps)
Jumlah pengguna aktif per jam	Suhu CPU (°C)
Jumlah paket data yang hilang	Waktu antar kedatangan paket

DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

Definisi:

Distribusi probabilitas diskrit adalah **daftar semua nilai** yang mungkin dari variabel acak diskrit **beserta probabilitasnya**.

Bentuk Penyajian:

1. Tabel Distribusi Probabilitas

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$P(X = x)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

2. Fungsi Probabilitas (PMF - Probability Mass Function)

$$P(X = x) = p(x)$$

3. Grafik

Diagram batang dengan sumbu X = nilai x , sumbu Y = $P(X = x)$.

Contoh:

Melempar 2 koin. X = jumlah gambar.

x	0	1	2
$P(X = x)$	1/4	2/4	1/4

SIFAT-SIFAT DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

Sifat 1: Probabilitas Bernilai Antara 0 dan 1

$$0 \leq P(X = x) \leq 1 \text{ untuk semua } x.$$

Sifat 2: Jumlah Semua Probabilitas = 1

$$\sum P(X = x) = 1$$

Sifat 3: Probabilitas Kumulatif

$$P(X \leq x) = \sum P(X = k) \text{ untuk } k \leq x$$

Contoh Pengecekan:

- ✓ Semua probabilitas antara 0 dan 1.
- ✓ Jumlah = 1.

Probabilitas Kumulatif:

- $P(X \leq 0) = P(X=0) = 1/4 = 0.25$
- $P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = 1/4 + 2/4 = 3/4 = 0.75$
- $P(X \leq 2) = 1$

x	0	1	2	Total
P(X = x)	1/4	2/4	1/4	4/4 = 1

CONTOH DISTRIBUSI PROBABILITAS DISKRIT

Contoh: Melempar 1 Dadu

X = mata dadu yang muncul.

Ruang sampel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Distribusi Probabilitas:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X = x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Cek: $\sum P(X = x) = 6 \times 1/6 = 1$ ✓

Probabilitas Kumulatif:

x	1	2	3	4	5	6
$P(X \leq x)$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1

Pertanyaan:

a) $P(X = 4) = 1/6 \approx 0.167$

b) $P(X \leq 4) = 4/6 \approx 0.667$

c) $P(X > 4) = 1 - P(X \leq 4) = 2/6 \approx 0.333$

NILAI HARAPAN (EKSPEKTASI) - DEFINISI

Definisi:

Nilai harapan (expected value) dari variabel acak diskrit X adalah **rata-rata tertimbang** dari semua nilai X dengan probabilitasnya.

Notasi: $E(X)$ atau μ

Rumus:

$$E(X) = \sum [x \times P(X = x)]$$

Interpretasi:

Nilai harapan adalah nilai **rata-rata jangka panjang** jika percobaan diulang berkali-kali.

Contoh Sederhana:

Melempar 1 dadu. $E(X) = \sum [x \times 1/6] = (1+2+3+4+5+6)/6 = 21/6 = \mathbf{3.5}$

Makna: Jika melempar dadu berkali-kali, rata-rata hasilnya adalah 3.5 (meskipun 3.5 bukan nilai yang mungkin muncul).

NILAI HARAPAN - CONTOH

Contoh: Melempar 2 Koin

X = jumlah gambar yang muncul.

x	0	1	2
$P(X = x)$	1/4	2/4	1/4

Hitung $E(X)$:

$$\begin{aligned} E(X) &= (0 \times 1/4) + (1 \times 2/4) + (2 \times 1/4) \\ &= 0 + 2/4 + 2/4 \\ &= 4/4 \\ &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

Interpretasi: Rata-rata jumlah gambar yang muncul dalam jangka panjang adalah 1.

NILAI HARAPAN - CONTOH

Contoh: Analisis Bug Software

X = jumlah bug dalam modul software.

$$P(X=0) = 0.5, P(X=1) = 0.3, P(X=2) = 0.15, P(X=3) = 0.05$$

$$\begin{aligned} E(X) &= (0 \times 0.5) + (1 \times 0.3) + (2 \times 0.15) + (3 \times 0.05) \\ &= 0 + 0.3 + 0.3 + 0.15 = \mathbf{0.75} \end{aligned}$$

Interpretasi: Rata-rata ada 0.75 bug per modul.

SIFAT-SIFAT NILAI HARAPAN

Sifat 1: Ekspektasi Konstanta $E(c) = c$

Sifat 2: Ekspektasi Linear $E(aX + b) = a \times E(X) + b$

Sifat 3: Ekspektasi Jumlah $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Sifat 4: Ekspektasi Perkalian (jika independen) $E(X \times Y) = E(X) \times E(Y)$ (jika X dan Y independen)

Contoh Penerapan:

Jika X = jumlah bug, $E(X) = 0.75$.

Biaya perbaikan bug = Rp 100.000 per bug + biaya tetap Rp 50.000.

Total biaya: $Y = 100.000X + 50.000$

$E(Y) = 100.000 \times E(X) + 50.000 = 100.000 \times 0.75 + 50.000 = \mathbf{Rp\ 125.000}$

VARIANS DAN STANDAR DEVIASI - DEFINISI

Varians (Var(X) atau σ^2) Ukuran penyebaran nilai-nilai X di sekitar nilai harapannya.

Rumus: $\text{Var}(X) = E[(X - \mu)^2] = \sum [(x - \mu)^2 \times P(X = x)]$

Rumus Alternatif (lebih mudah dihitung): $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

Standar Deviasi (σ): $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$

Interpretasi:

- Varians kecil $\rightarrow$ nilai X berkumpul di sekitar mean
- Varians besar $\rightarrow$ nilai X menyebar jauh dari mean

VARIANS - CONTOH PERHITUNGAN

Contoh: Melempar 2 Koin

X = jumlah gambar. Distribusi: $P(0)=1/4$, $P(1)=2/4$, $P(2)=1/4$

$$E(X) = 1$$

Hitung $E(X^2)$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum [x^2 \times P(X = x)] \\ &= (0^2 \times 1/4) + (1^2 \times 2/4) + (2^2 \times 1/4) \\ &= 0 + 2/4 + 4/4 \\ &= 6/4 = \mathbf{1.5} \end{aligned}$$

Hitung Varians:

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \\ &= 1.5 - (1)^2 \\ &= 1.5 - 1 \\ &= \mathbf{0.5} \end{aligned}$$

Hitung Standar Deviasi:

$$\sigma = \sqrt{0.5} \approx \mathbf{0.707}$$

Interpretasi: Penyebaran jumlah gambar dari mean (1) adalah sekitar 0.707.

VARIANS - CONTOH IT

Contoh: Jumlah Error dalam Transmisi Data

X = jumlah error per 1000 bit.

Distribusi:

x	0	1	2	3
P(X = x)	0.6	0.25	0.1	0.05

Langkah 1: Hitung E(X)

$$\begin{aligned} E(X) &= (0 \times 0.6) + (1 \times 0.25) + (2 \times 0.1) + (3 \times 0.05) \\ &= 0 + 0.25 + 0.2 + 0.15 = \mathbf{0.6} \end{aligned}$$

Langkah 2: Hitung E(X²)

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (0^2 \times 0.6) + (1^2 \times 0.25) + (2^2 \times 0.1) + (3^2 \times 0.05) \\ &= 0 + 0.25 + 0.4 + 0.45 = \mathbf{1.1} \end{aligned}$$

Langkah 3: Hitung Varians

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 1.1 - (0.6)^2 = 1.1 - 0.36 = \mathbf{0.74}$$

Langkah 4: Standar Deviasi

$$\sigma = \sqrt{0.74} \approx \mathbf{0.86}$$

Interpretasi: Rata-rata error 0.6 per 1000 bit, dengan penyebaran sekitar 0.86.

RINGKASAN FORMULA

Ukuran	Rumus	Keterangan
Distribusi Probabilitas	$P(X = x)$	Probabilitas X mengambil nilai x
Sifat	$\sum P(X = x) = 1$	Total probabilitas = 1
Nilai Harapan	$E(X) = \sum [x \times P(X = x)]$	Rata-rata tertimbang
Ekspektasi X^2	$E(X^2) = \sum [x^2 \times P(X = x)]$	Untuk hitung varians
Varians	$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$	Ukuran penyebaran
Standar Deviasi	$\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$	Akar varians

Langkah Perhitungan:

1. Buat tabel distribusi probabilitas.
2. Hitung $E(X) = \sum x \cdot P(x)$.
3. Hitung $E(X^2) = \sum x^2 \cdot P(x)$.
4. Hitung $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.
5. Hitung $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)}$.

APLIKASI DI BIDANG TEKNIK INFORMATIKA

1. Analisis Kinerja Sistem

X = jumlah request per detik.

$E(X)$ = rata-rata beban server.

$Var(X)$ = stabilitas beban (varians kecil = stabil).

2. Keamanan Jaringan

X = jumlah serangan per jam.

$E(X)$ = rata-rata serangan.

$Var(X)$ = fluktuasi serangan.

3. Pengujian Perangkat Lunak

X = jumlah bug per modul.

$E(X)$ = rata-rata bug.

$Var(X)$ = konsistensi kualitas modul.

4. Komunikasi Data

X = jumlah paket hilang per 1000 paket.

$E(X)$ = rata-rata packet loss.

$Var(X)$ = variasi kualitas jaringan.

5. Sistem Antrian

X = jumlah pelanggan dalam antrian.

$E(X)$ = rata-rata panjang antrian.

$Var(X)$ = fluktuasi antrian.

CONTOH KASUS TERAPAN

Kasus: Analisis Bug dalam Modul Software

Sebuah tim QA menemukan distribusi bug per modul sebagai berikut:

Jumlah Bug (x)	Probabilitas
0	0.40
1	0.30
2	0.20
3	0.10

Pertanyaan:

- a) Berapa rata-rata bug per modul?
- b) Berapa varians dan standar deviasi?
- c) Jika biaya perbaikan Rp 200.000 per bug, berapa ekspektasi biaya per modul?

CONTOH KASUS TERAPAN

Penyelesaian:

a) $E(X) = (0 \times 0.4) + (1 \times 0.3) + (2 \times 0.2) + (3 \times 0.1) = 0 + 0.3 + 0.4 + 0.3 =$
1.0

b) $E(X^2) = (0^2 \times 0.4) + (1^2 \times 0.3) + (2^2 \times 0.2) + (3^2 \times 0.1) = 0 + 0.3 + 0.8 + 0.9$
 $= 2.0$

$$\text{Var}(X) = 2.0 - (1.0)^2 = 2.0 - 1.0 = \mathbf{1.0}$$

$$\sigma = \sqrt{1.0} = \mathbf{1.0}$$

c) $\text{Biaya} = 200.000 \times X$

$$E(\text{Biaya}) = 200.000 \times E(X) = 200.000 \times 1.0 = \mathbf{Rp\ 200.000}$$

LATIHAN SOAL

Soal 1:

Sebuah variabel acak diskrit X memiliki distribusi:

x	1	2	3	4
P(X=x)	0.2	0.3	0.4	0.1

Hitunglah:

- a) $E(X)$
- b) $E(X^2)$
- c) $\text{Var}(X)$
- d) σ

LATIHAN SOAL

Soal 2:

Sebuah server menerima jumlah request per detik dengan distribusi:

Request (x)	0	1	2	3
P(X=x)	0.1	0.4	0.3	0.2

Hitunglah:

- Rata-rata request per detik
- Varians dan standar deviasi
- Jika kapasitas server 2 request/detik, berapa peluang server overload ($X > 2$)?

LATIHAN SOAL

Soal 3:

Dalam sebuah game, pemain mendapat skor X dengan distribusi:

Skor (x)	10	20	50	100
$P(X=x)$	0.5	0.3	0.15	0.05

Hitunglah ekspektasi skor dan variansnya!

KESIMPULAN

1. **Variabel Acak** adalah fungsi yang memetakan hasil percobaan ke bilangan real.
2. **Variabel Acak Diskrit** memiliki nilai terbatas/terhitung.
3. **Distribusi Probabilitas Diskrit** adalah daftar nilai dan probabilitasnya.
Sifat: $0 \leq P(X=x) \leq 1$ dan $\sum P(X=x) = 1$.
4. **Nilai Harapan $E(X)$** $= \sum [x \times P(X=x)] \rightarrow$ rata-rata jangka panjang.
5. **Varians $Var(X)$** $= E(X^2) - [E(X)]^2 \rightarrow$ ukuran penyebaran.
6. **Standar Deviasi σ** $= \sqrt{Var(X)}$.

TUGAS

Soal 1:

Sebuah variabel acak diskrit X memiliki distribusi:

x	0	1	2	3	4
P(X=x)	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

Hitunglah:

- a) $E(X)$
- b) $E(X^2)$
- c) $\text{Var}(X)$
- d) σ

TUGAS

Soal 2:

Sebuah aplikasi memiliki jumlah crash per hari dengan distribusi:

Crash (x)	0	1	2	3
P(X=x)	0.5	0.3	0.15	0.05

- a) Berapa rata-rata crash per hari?
- b) Berapa varians dan standar deviasi?
- c) Jika target maksimal 1 crash per hari, berapa peluang melebihi target?

TUGAS

Soal 3:

Dalam sebuah game, pemain mendapat hadiah X (dalam ribuan rupiah):

Hadiah (x)	0	10	50	100
$P(X=x)$	0.6	0.25	0.1	0.05

Hitung ekspektasi hadiah dan variansnya!