DISTRIBUSI PROBABILITAS

DISTRIBUSI PROBABILITAS

Peluang terjadinya nilai variabel random X yang meliputi semua nilai ditentukan melalui distribusi peluang. Distribusi peluang suatu variabel random X adalah himpunan nilai peluang dari variabel random X yang ditampilkan dalam bentuk tabel dan atau gambar.

DALAM BAHASA LAIN :

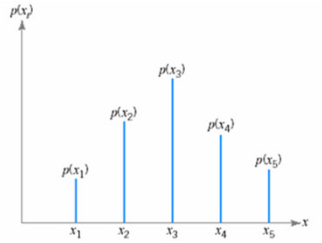
Ketika nilai probabilitas diberikan kepada semua nilai numeris yang mungkin dari sebuah variabel random X, baik dengan sebuah daftar atau sebuah fungsi matematis, hasilnya adalah distribusi probabilitas/ peluang.

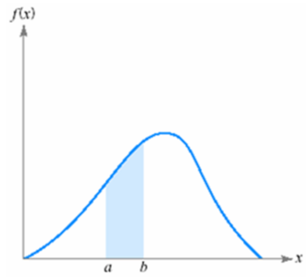
NOTE : jumlah probabilitas dari semua nilai numeris yang mungkin terjadi **HARUS BERNILAI 1**

DISTRIBUSI PROBABILITAS

Distribusi peluang

- Distribusi peluang diskrit
- Distribusi peluang kontinyu





DISTRIBUSI PELUANG DISKRIT

DISTRIBUSI PELUANG DISKRIT : fungsi p(y) yang memberikan nilai peluang untuk setiap variabel y yang DISKRIT, dengan syarat :

a. $0 \le p(y) \le 1$

b. $\sum_{\text{all } y} p(y) = 1$

c. $P(y) = \sum_{t} p(t)$, dengan P(y) adalah peluang kumulatif dari y.

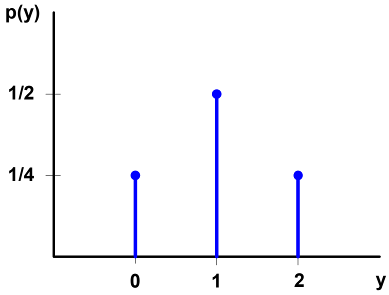
Distribusi peluang bagi variabel acak diskrit dapat disajikan dalam bentuk tabel, grafik atau rumus yang mengaitkan nilai peluang dengan setiap nilai variabel acaknya.

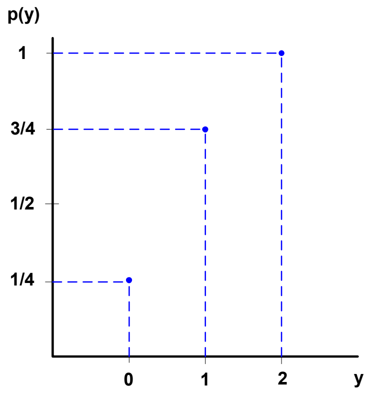
Contoh : Pelemparan koin 2 kali untuk mencari distribusi peluang jumlah muka. Kita definisikan Y = jumlah muka yang muncul.

E_i	Y	$p(E_i)$	$P(E_i)$
MM	2	1/4	1/4
MB	1	1/4	1/2
BM	1	1/4	3/4
BB	0	1/4	1

DISTRIBUSI PELUANG DISKRIT

Dapat digambar grafik dan plot sbb :





$$P(Y = y) = p(y) = \begin{matrix} 0.25 & \text{jika } y = 0 \text{ atau } 2 \\ 0.50 & \text{jika } y = 1 \end{matrix}$$

DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU

DISTRIBUSI PELUANG KONTINYU : fungsi f(y) yang memberikan nilai peluang untuk setiap variabel y yang KONTINYU, dengan syarat :

a. $0 \le f(y) \le 1$

b. $\int_{\infty}^{\infty} f(y)\,dy = 1$

c. P (a < y < b) = $\int_{\infty}^{\infty} f(y)$, dengan P(a < y < b) adalah peluang kumulatif dari y = a sampai y = b.

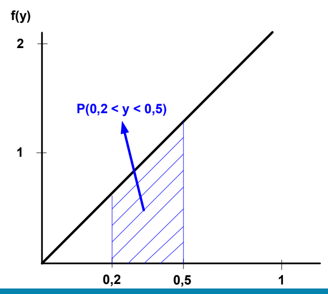
Contoh : diberikan fungsi peluang untuk variabel Y yang kontinyu :

$$F(y) = \begin{cases} 2y \text{ , jika } 0 \le y \le 1` \\ 0 \text{ , jika y bernilai lainnya} \end{cases}$$

Akan dicari nilai P (0,2 < y < 0,5)

MAKA : P (0,2 < y < 0,5) =

$$= \int_{0,2}^{0,5} f(y).dy = \int_{0,2}^{0,5} 2y.dy = y^2\Big|_{0,2}^{0,5} = 0,25 \quad 0,04 = 0,21$$



NILAI HARAPAN

ILUSTRASI 1 :

Dua uang logam dilantunkan sebanyak 16 kali dan Y menyatakan banyaknya muncul MUKA per lantunan.

» Y = 0, 1, dan 2

MISAL dari percobaan menghasilkan :

- Tidak ada muka (y = 0) = 4 kali
- Muncul satu muka (y = 1) = 7 kali
- Muncul dua muka (y = 2) = 5 kali +

16 kali

MAKA rataan banyaknya muka per lantunan dua uang logam tadi adalah :

$$\frac{(0)(4)+(1)(7)+(2)(5)}{16} = (0)(\frac{4}{16})+(1)(\frac{7}{16})+(2)(\frac{5}{16}) = 1{,}06$$

NILAI HARAPAN

ILUSTRASI 2 :

Apabila masalah perhitungan rataan banyaknya muka per lantunan dilakukan dalam JANGKA PANJANG atau berulang - ulang.

- Tidak ada muka (y = 0) = 1/ 4 kali seluruh lantunan
- Muncul satu muka (y = 1) = 1/ 2 kali seluruh lantunan
- Muncul dua muka (y = 2) = 1/ 4 kali seluruh lantunan

MAKA rataan banyaknya muka per lantunan dua uang logam tadi adalah :

$$0(\frac{1}{4})+1(\frac{1}{2})+2(\frac{1}{4}) = 1$$

Ini berarti bila seseorang melantunkan dua uang logam berulang – ulang, maka RATA – RATAnya, dia akan mendapatkan satu muka per lantunan.

ATAU

Banyaknya muka perlantunan yang DIHARAPKAN muncul dalam jangka panjang akan memberikan NILAI HARAPAN sebesar satu muka per lantunan.

NILAI HARAPAN

BANDINGKAN ILUSTRASI 1 DENGAN ILUSTRASI 2 !!!

Kedua ilustrasi di atas menjelaskan bahwa RATAAN suatu peubah acak dapat diperoleh dengan mengalikan tiap nilai peubah acak tersebut dengan peluang padanannya dan kemudian menjumlahkan hasilnya.

RATA – RATA ini disebut dengan NILAI HARAPAN dan dinyatakan dengan E(Y).

DIRUMUSKAN dengan :

$$E(Y) = \sum_{\text{all } y} y.p(y)$$ **Bila y DISKRIT**

$$E(Y) = \int_{\infty}^{\infty} y.f(y).dy$$ **Bila y KONTINYU**

NILAI HARAPAN

CONTOH 1 :

Carilah nilai harapan banyaknya kimiawan dalam panitia 3 orang yang dipilih secara acak dari 4 kimiawan dan 3 biolog!

JAWAB.

MISAL X adalah banyaknya kimiawan dalam panitia. Distribusi peluang X adalah :

$$f(x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{3}{3-x}}{\binom{7}{3}} \text{ , } x = 0, 1, 2, 3$$

Aturan kombinasi : proses pemilihan tanpa memperhatikan urutan.

$$f(0) = \frac{\binom{4}{0}\binom{3}{3-0}}{\binom{7}{3}} \qquad \binom{3}{3-0} = \frac{3!}{3!0!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$f(0) = \frac{(1)(1)}{(35)} = \frac{1}{35}$$

f (0) = 1/ 35
f (1) = 12/ 35
f (2) = 18/ 35
f (3) = 4/ 35

E(X) = (0) (1/35) + (1) (12/35) + (2) (18/35) + (3) (4/35)
= 12/ 7 = 1,7

JADI, bila suatu panitia beranggota 3 orang dipilih secara acak berulang – ulang dari 4 kimiawan dan 3 biolog, maka rata – ratanya akan beranggota 1,7 kimiawan.

NILAI HARAPAN

CONTOH 2 :

Misalkan X peubah acak yang menyatakan umur dalam jam sejenis bola lampu. Fungsi padat peluangnya diberikan oleh :

$$f(x) = \frac{20000}{x^3}, \quad x > 100$$
$$= 0 \quad , \quad \text{untuk } x \text{ lainnya}$$

Maka harapan umur sebuah bola lampu adalah :

$$E(X) = \int_{100}^{\infty} x.\frac{20000}{x^3}.dx = \int_{100}^{\infty} \frac{20000}{x^2}.dx = \frac{20000}{x}\Big|_{\infty}^{100}$$

$$E(X) = 200 - \lim_{x \to \infty} \left(\frac{20000}{x}\right) = 200$$

UKURAN PENYEBARAN

Ukuran penyebaran dari suatu variabel acak adalah varians, yaitu besaran yang menyatakan variabilitas data dari nilai sentralnya. Varians dari suatu variabel acak X adalah :

$Var(X) = \sigma^2 = E(X - \mu)^2$
$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$
$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - 2\mu E(X) + E(\mu^2)$.
Karena $\mu = E(X)$ dan $E(\mu^2) = \mu^2$
$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$

CONTOH 1 :

Hitunglah variansi X, bila X menyatakan banyaknya kimiawan dalam panitia 3 orang yang dipilih secara acak dari 4 kimiawan dan 3 biolog.
Dari perhitungan terdahulu telah didapatkan $\mu = 12/7 = 1{,}7$. [$\mu = E(X)$]

$$E(X^2) = (0)(1/35) + (1)(12/35) + (4)(18/35) + (9)(4/35)$$
$$= 24/7 = 1{,}7$$

$$Var(X) = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{24}{7} - \left(\frac{12}{7}\right)^2 = \frac{24}{49}$$

-

UKURAN PENYEBARAN

CONTOH 2 :

Hitunglah rataan dan variansi peubah acak X, bila X mempunyai fungsi padat peluang :

$$f(x) = 2(x-1), \quad 1 < x < 2$$
$$= 0 \quad , \quad \text{untuk } x \text{ lainnya}$$

JAWAB.

$$\mu = E(X) = 2\int_1^2 x(x-1)dx = \frac{5}{3}$$

$$E(X^2) = 2\int_1^2 x^2(x-1).dx = \frac{17}{6}$$

MAKA

$$\text{Var (X)} = \sigma^2 = E(X^2) - \mu^2 = \frac{17}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{51-50}{18} = \frac{1}{18}$$

TEOREMA CHEBYSHEV

Bila kita mengalami kesulitan untuk MENDEFINISIKAN distribusi peluang dari sebuah variabel acak Y, dapat dipakai suatu taksiran yaitu TEOREMA CHEBYSHEV :

"Peluang variabel acak Y akan berada dalam rentang μ ±kσ adalah

PALING SEDIKIT $1 - \frac{1}{k^2}$ **"**

ATAU

$$P(\mu - k\sigma < y < \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

CONTOH :

Terdapat sebuah data dengan μ = 8 dan σ = 3. Pengamat mengalami kesulitan untuk mendefinisikan distribusi peluangnya. Pengamat ingin mencari peluang jatuhnya sebuah data dalam selang – 4 < y < 20, maka :

P (- 4 < y < 20) = P (8 – k.3 < y < 8 + k.3), jadi k = 4

P (- 4 < y < 20) ≥ 1 – 1/4²

P (- 4 < y < 20) ≥ 15/ 16

MACAM – MACAM DISTRIBUSI PROBABILITAS

- Distribusi peluang diskrit
  - Distribusi binomial
  - Distribusi binomial -
  - Distribusi geometrik
  - Distribusi hipergeometrik
  - Distribusi poison

MACAM – MACAM DISTRIBUSI PROBABILITAS

- Distribusi peluang kontinyu
  - Distribusi seragam
  - Distribusi gamma
  - Distribusi eksponensial
  - Distribusi weibull
  - Distribusi tipe beta
  - Distribusi normal