Probabilitas

1

Tujuan Pembelajaran

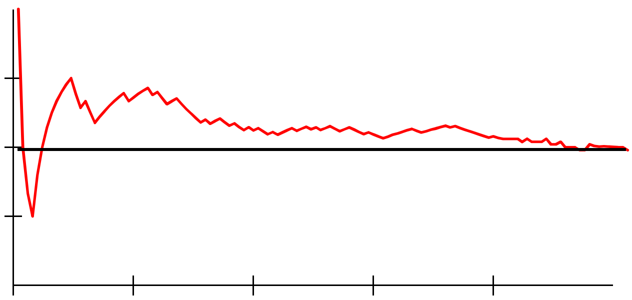
1. Menjelaskan Eksperimen, Hasil, Kejadian, Ruang Sampel, & Peluang
2. Menjelaskan bagaimana menetapkan peluang
3. Menggunakan Tabel Kontingensi, Diagram Venn, atau Diagram Tree untuk menentukan peluang
4. Menggambarkan dan Menggunakan Aturan Peluang

Tantangan Berpikir

- Berapakah peluang mendapatkan **sisi muka** pada pelemparan tunggal suatu koin ? Gunakan skala dari **0 (tidak terjadi)** sampai dengan **1 (pasti terjadi).**
- **Pelemparan koin dua kali.** Lakukan ! Apakah anda mendapatkan satu sisi muka dan satu sisi belakang ? Apakah arti semuanya ?

Banyak Pengulangan !*

Total Sisi Muka /
Banyak Pelemparan



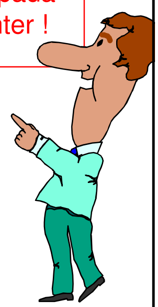
Banyak Pelemparan

Percobaan,
Hasil dan Kejadian

Percobaan & Hasil

1. Percobaan (Experiment)
   - Proses mendapatkan suatu pengamatan, Hasil atau Kejadian Sederhana
2. Titik Sampel (Sample Point)
   - Hasil Percobaan Paling Dasar
3. Ruang Sampel (S)
   - Kumpulan dari *seluruh* hasil yang mungkin

Ruang Sampel
tergantung pada
Eksperimenter !



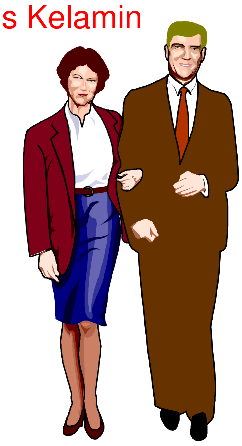
Contoh Hasil (Outcome)

Percobaan	Ruang Sampel
Lempar sebuah koin, catat permukaan	Muka, Belakang
Lempar 2 Koin, catat permukaan	MM, MB, BM, BB
Pilih 1 Kartu, Catat Macam	2♥, 2♦, ..., A♠ (52)
Pilih 1 Kartu, Catat Warna	Merah, Hitam
Main satu permainan Sepakbola	Menang, Kalah, Seri
Periksa suatu Bagian, Catat Mutu	Cacat, OK
Amati Jenis Kelamin	Laki-laki, Wanita

Sifat-Sifat Hasil

1. Mutually Exclusive
   - 2 Hasil yang tidak dapat terjadi pada waktu yang bersamaan
     - **Antara** Laki-laki dan Wanita pada orang yang sama
2. Collectively Exhaustive
   - 1 Hasil dalam Ruang Sampel Pasti Terjadi
     - Laki-laki atau Wanita

Eksperimen : Mengamati Jenis Kelamin



Kejadian (Events)

1. Kumpulan Satu atau Beberapa Titik Sampel
2. Kejadian Sederhana (Simple Event)
   - Hasil dari ruang sampel dengan 1 karakteristik
3. Kejadian Majemuk (Compound Event)
   - Kumpulan dari Hasil atau Kejadian Sederhana
   - 2 atau lebih karakteristik
   - Kejadian Bersama (Joint Event) merupakan kasus khusus
     - 2 Kejadian terjadi bersamaan

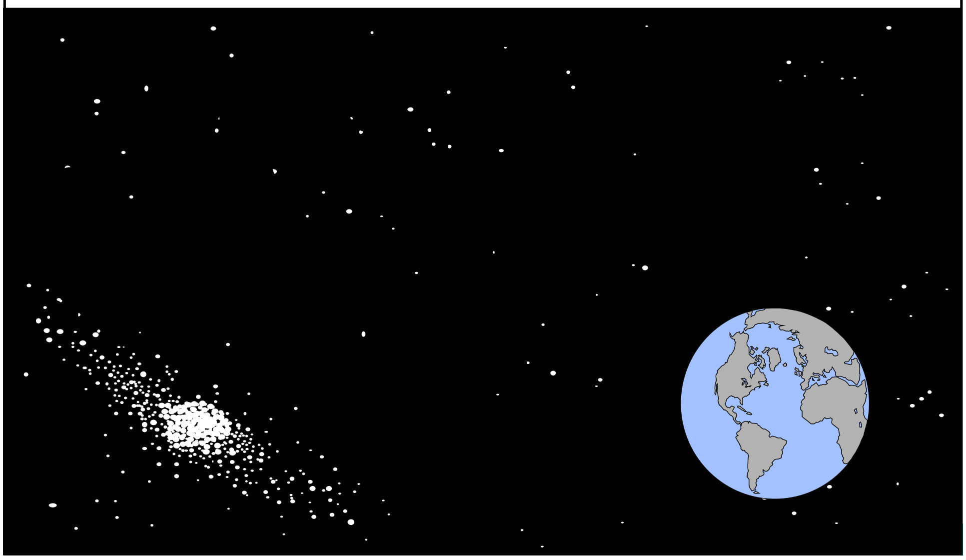
Contoh Kejadian

Eksperimen : Pelemparan 2 Koin. Catat Permukaan.

Kejadian	Hasil Kejadian
Ruang Sampel	MM, MB, BM, BB
1 Muka & 1 Belakang	MB, BM
Muka pada Koin Pertama	MM, MB
Paling sedikit 1 Muka	MM, MB, BM
Muka pada keduanya	MM

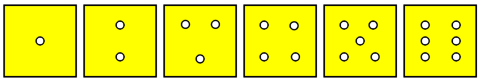
Ruang Sampel

Visualisasi Ruang Sampel



Daftar

Contoh : Seluruh enam sisi suatu dadu :



Contoh : Seluruh 52 kartu satu bungkus :

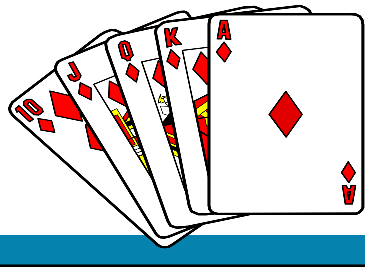
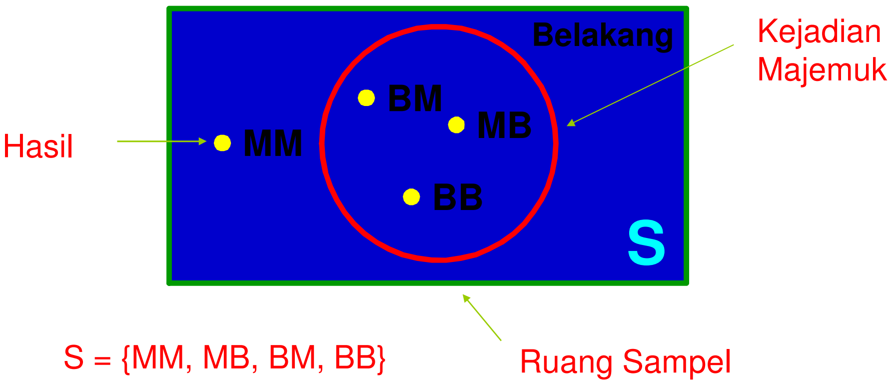


Diagram Venn

Eksperimen : Pelemparan 2 Koin. Catat Permukaan.



S = {MM, MB, BM, BB}

Tabel Kontingensi

Eksperimen : Pelemparan 2 Koin. Catat Permukaan.

Kejadian Sederhana (Muka pada Koin Pertama)

Koin Pertama	Koin Kedua: Muka	Koin Kedua: Blkn	Total
Muka	MM	MB	MM, MB
Blkn	BM	BB	BM, BB
Total	MM,BM	MB,BB	S

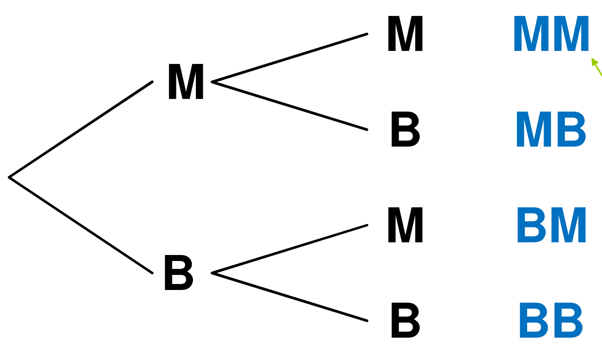
Hasil (Biasanya ditunjukkan dalam Jumlah, % Total)

S = {MM, MB, BM, BB}

Ruang Sampel

Tree Diagram

Eksperimen : Pelemparan 2 Koin. Catat Permukaan.



Hasil

S = {MM, MB, BM, BB}

Ruang Sampel

Kejadian Majemuk (Compound Events)

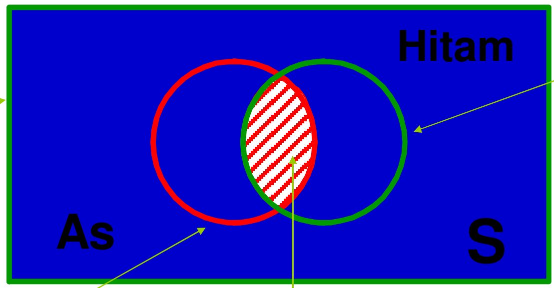
Bentuk Kejadian Majemuk

1. Irisan (Intersection)
   - Hasilnya antara dua kejadian A ***dan*** B
   - Dinyatakan dengan 'DAN'
   - Lambang $\cap$ (contoh : $A \cap B$)
2. Gabungan (Union)
   - Hasilnya salah satu kejadian A ***atau*** B atau keduanya
   - Dinyatakan dengan 'ATAU'
   - Lambang $\cup$ (contoh : $A \cup B$)

Irisan Kejadian : Diagram Venn

Eksperimen : Tarik 1 Kartu. Catat Macam, Warna dan Rupa Kartu.

Ruang Sampel : $2_{M\heartsuit}$, $2_{M\diamondsuit}$, $2_{H\clubsuit}$, …, $A_{H\spadesuit}$



Kejadian Hitam : $2_{H\clubsuit}$, …, $A_{H\spadesuit}$

Kejadian As : $A_{M\heartsuit}$, $A_{M\diamondsuit}$, $A_{H\clubsuit}$, $A_{H\spadesuit}$

Kejadian Gabungan (As $\cap$ Hitam) : $A_{H\clubsuit}$, $A_{H\spadesuit}$

Irisan Kejadian : Tabel Kontingensi

Eksperimen : Tarik 1 Kartu. Catat Macam, Warna dan Rupa Kartu.

Ruang Sampel (S) : $2_{M\heartsuit}$, $2_{M\diamondsuit}$, $2_{H\clubsuit}$, …, $A_{H\spadesuit}$

Jenis	Warna		Total
	Merah	Hitam	
As	As & Merah	As & Hitam	As
Non-As	Non & Merah	Non & Hitam	Non-As
Total	Merah	Hitam	S

Kejadian Sederhana As : $A_{R\heartsuit}$, $A_{R\diamondsuit}$, $A_{B\clubsuit}$, $A_{B\spadesuit}$

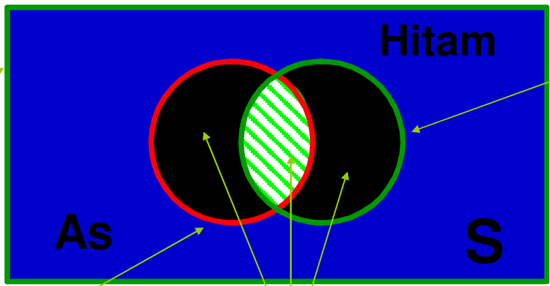
Kejadian Gabungan As ***DAN*** Hitam : $A_{H\clubsuit}$, $A_{H\spadesuit}$

Kejadian Sederhana Hitam : $2_{H\clubsuit}$, …, $A_{H\spadesuit}$

Gabungan Kejadian : Diagram Venn

Eksperimen : Tarik 1 Kartu. Catat Macam, Warna dan Rupa Kartu.

Ruang Sampel : $2_{M\heartsuit}$, $2_{M\diamondsuit}$, $2_{H\clubsuit}$, …, $A_{H\spadesuit}$



Kejadian Hitam : $2_{H\clubsuit}$, $2_{H\spadesuit}$, …, $A_{H\spadesuit}$

Kejadian As : $A_{M\heartsuit}$, $A_{M\diamondsuit}$, $A_{H\clubsuit}$, $A_{H\spadesuit}$

Kejadian (As $\cup$ Hitam) : $A_{M\heartsuit}$, …, $A_{H\spadesuit}$, $2_{H\clubsuit}$, …, $K_{H\spadesuit}$

Gabungan Kejadian : Tabel Kontingensi

Eksperimen : Tarik 1 Kartu. Catat Macam, Warna dan Rupa Kartu.

Ruang Sampel (S) : $2_{M\heartsuit}$, $2_{M\diamondsuit}$, $2_{H\clubsuit}$, …, $A_{H\spadesuit}$

Jenis	Warna		Total
	Merah	Hitam	
As	As & Merah	As & Hitam	As
Non-As	Non & Merah	Non & Hitam	Non-As
Total	Merah	Hitam	S

Kejadian Sederhana As : $A_{M\heartsuit}$, $A_{M\diamondsuit}$, $A_{H\clubsuit}$, $A_{H\spadesuit}$

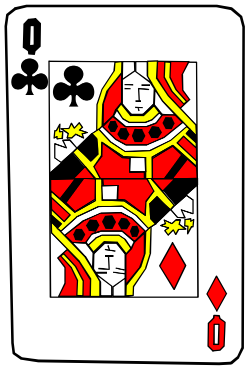
Kejadian Gabungan As ***ATAU*** ***Hitam*** : $A_{M\heartsuit}$, …, $A_{H\spadesuit}$, $2_{H\clubsuit}$, …, $K_{H\spadesuit}$

Kejadian Sederhana Hitam : $2_{H\clubsuit}$, …, $A_{H\spadesuit}$

Kejadian Khusus

1. Kejadian Kosong (Null Event)
   - Club & Diamond pada tarikan 1 kartu
2. Komplemen dari Kejadian
   - Untuk setiap Kejadian A, Seluruh Kejadian tidak dalam A : A'
3. Kejadian Mutually Exclusive
   - Kejadian yang tidak terjadi serentak

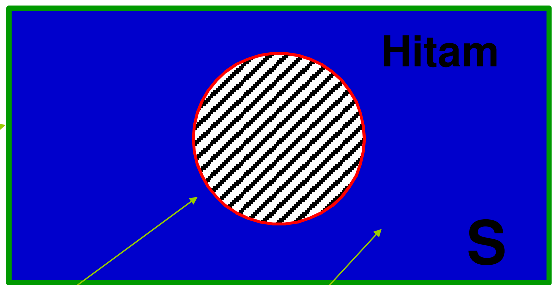
Kejadian Kosong



Contoh Komplemen suatu Kejadian

Eksperimen : Tarik 1 Kartu. Catat Macam, Warna dan Rupa Kartu.

Ruang Sampel : $2_{M\heartsuit}$, $2_{M\diamondsuit}$, $2_{H\clubsuit}$, ..., $A_{H\spadesuit}$



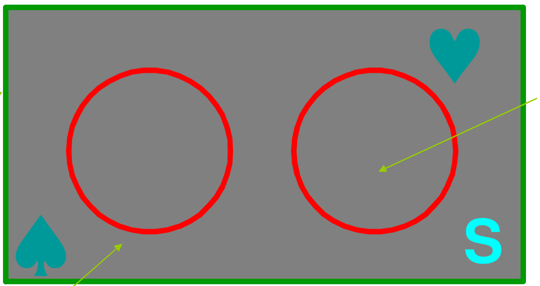
Kejadian Hitam : $2_{H\clubsuit}$, $2_{H\spadesuit}$, ..., $A_{H\spadesuit}$

Komplemen Kejadian Hitam, Hitam' : $2_{M\heartsuit}$, $2_{M\diamondsuit}$, ..., $A_{M\heartsuit}$, $A_{M\diamondsuit}$

Contoh Kejadian Mutually Exclusive

Eksperimen : Tarik 1 Kartu. Catat Macam dan Rupa Kartu.

Ruang Sampel : $2_{\heartsuit}$, $2_{\diamondsuit}$, $2_{\clubsuit}$, ..., $A_{\spadesuit}$



Hasil pada kejadian Heart: $2_{\heartsuit}$, $3_{\heartsuit}$, $4_{\heartsuit}$, ..., $A_{\heartsuit}$

Kejadian Spade: $2_{\spadesuit}$, $3_{\spadesuit}$, $4_{\spadesuit}$, ..., $A_{\spadesuit}$

Kejadian ♠ &♥ adalah Mutually Exclusive

Latihan

1. Pelemparan 2 dadu, jelaskan hasil kejadian dari kejadian berikut :
   - Ruang Sampel
   - Dadu pertama dan kedua keluar angka Genap
   - Dadu pertama dan kedua kelipatan 3
   - Keduanya angka 1
   - Angka 5 pada dadu pertama

26

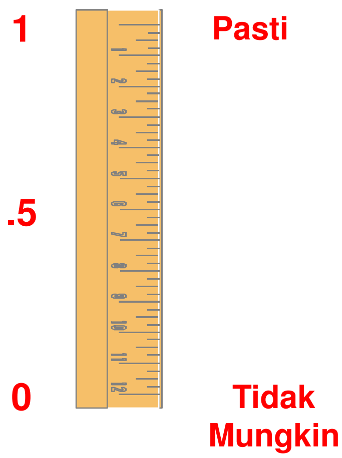
Latihan

2. Pada pelemparan 2 buah dadu, buatlah diagram venn dan tabel kontingensi untuk
   - Munculnya dadu angka satu dan ganjil
   - Munculnya dadu angka satu atau ganjil
   - Munculnya dadu angka satu dan genap
   - Munculnya dadu angka satu atau genap
   - Munculnya dadu angka ganjil dan genap
   - Dari 5 kejadian mana yang merupakan mutually exclusive?

Peluang (Probabilitas)

Apakah Peluang itu ?

1. Ukuran numerik dari kemungkinan suatu kejadian akan terjadi
   - *P*(Kejadian)
   - *P*(A)
   - *Prob*(A)
2. Terletak antara 0 & 1
3. Jumlah seluruh kejadian adalah 1



Penetapan Peluang Kejadian

1. *a priori* Classical Method
2. Empirical Classical Method
3. Subjective Method

a priori Classical Method

1. Pengetahuan Proses Sebelumnya
2. Sebelum Eksperimen
3. *P*(Kejadian) = *X* / *T*
   - *X* = Jumlah Hasil Kejadian
   - *T* = Total Hasil dalam Ruang Sampel
   - Masing-masing Hasil T adalah kemungkinan besar sama
     - *P*(Outcome) = 1/*T*

Empirical Classical Method

1. Data Aktual dikumpulkan
2. Setelah Eksperimen
3. *P*(Kejadian) = *X* / *T*
   - Mengulang Eksperimen *T* kali
   - Kejadian diamati *X* kali
4. Juga dikenal dengan Relative Frequency Method

Dari 100 bagian diperiksa, hanya 2 yang cacat !

Subjective Method

1. Pengetahuan tentang Keadaan secara Pribadi
2. Sebelum Eksperimen
3. Proses Unik
   - Tidak dapat diulang
4. Peluang akan berbeda dari orang yang berbeda

Tantangan Berpikir

Metode mana yang seharusnya digunakan untuk mengetahui peluang ...

1. Sebuah kotak dari 24 baut akan cacat ?
2. Sebuah lemparan satu koin akan menghasilkan sisi belakang ?
3. Joko akan gagal melunasi hutangnya ?
4. Seorang Mahasiswa akan memperoleh nilai A di kelas ini ?
5. Sebuah toko baru di Mall Galaxy akan berhasil ?

Peluang Kejadian Majemuk

1. Ukuran numerik dari kemungkinan kejadian majemuk akan terjadi
2. Seringkali dapat menggunakan Tabel Kontingensi
   - Hanya 2 Variabel
3. Metode Perumusan
   - Aturan Aditif (Additive Rule)
   - Rumus Peluang Bersyarat (Conditional Probability)
   - Aturan Multiplikatif (Multiplicative Rule)

Peluang Kejadian menggunakan Tabel Kontingensi

Kejadian	Kejadian		
	B_1	B_2	Total
A_1	$P(A_1 \cap B_1)$	$P(A_1 \cap B_2)$	$P(A_1)$
A_2	$P(A_2 \cap B_1)$	$P(A_2 \cap B_2)$	$P(A_2)$
Total	$P(B_1)$	$P(B_2)$	1

Joint Probability

Marginal (Simple) Probability

Contoh Tabel Kontingensi

Eksperimen : Tarik 1 Kartu. Catat Macam, Warna dan Rupa Kartu.

Jenis	Warna		Total
	Merah	Hitam	
As	2/52	2/52	4/52
Non-As	24/52	24/52	48/52
Total	26/52	26/52	52/52

P(As)

P(Merah)

P(As DAN Merah)

Tantangan Berpikir

Berapakah Peluangnya ?

P(A) =

P(D) =

$P(C \cap B)$ =

$P(A \cup D)$ =

$P(B \cap D)$ =

Kejadian	Kejadian		Total
	C	D	
A	4	2	6
B	1	3	4
Total	5	5	10

Solusi *

Peluangnya adalah :

$P(A) = 6/10$

$P(D) = 5/10$

$P(C \cap B) = 1/10$

$P(A \cup D) = 9/10$

$P(B \cap D) = 3/10$

Kejadian	Kejadian		Total
	C	D	
A	4	2	6
B	1	3	4
Total	5	5	10

Aturan Aditif

Aturan Aditif

1. Digunakan untuk mendapatkan Peluang Majemuk untuk *Gabungan* suatu Kejadian
2. $P(A \text{ ATAU } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. Untuk Kejadian Mutually Exclusive :
   $P(A \text{ ATAU } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Contoh Aturan Aditif

Eksperimen : Tarik 1 Kartu. Catat Macam, Warna dan Rupa Kartu.

Jenis	Warna		Total
	Merah	Hitam	
As	2	2	4
Non-As	24	24	48
Total	26	26	52

$$P(\text{As ATAU Hitam}) = P(\text{As}) + P(\text{Hitam}) - P(\text{As} \cap \text{Hitam})$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{26}{52} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52}$$

Tantangan Berpikir

Dengan menggunakan Aturan Aditif, Berapakah Peluangnya ?

$P(A \cup D) =$

$P(B \cup C) =$

Kejadian	Kejadian C	Kejadian D	Total
A	4	2	6
B	1	3	4
Total	5	5	10

Solusi *

Dengan menggunakan Aturan Aditif, Peluangnya adalah :

$$P(A \cup D) = P(A) + P(D) - P(A \cap D)$$
$$= \frac{6}{10} + \frac{5}{10} - \frac{2}{10} = \frac{9}{10}$$

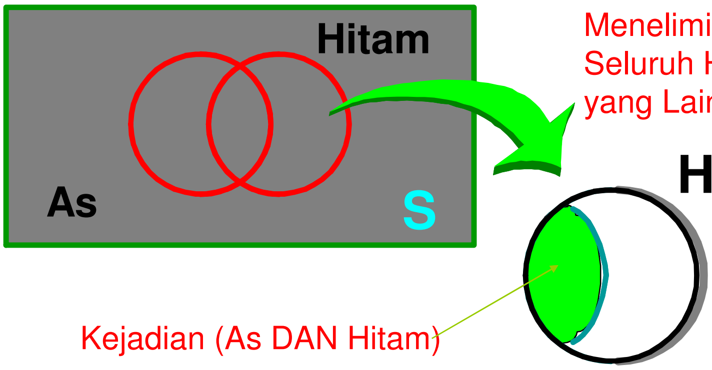
$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$$
$$= \frac{4}{10} + \frac{5}{10} - \frac{1}{10} = \frac{8}{10}$$

Peluang Bersyarat

Peluang Bersyarat

1. Peluang Kejadian dengan ***Adanya*** Kejadian lain yang terjadi
2. Merubah Ruang Sampel Asli dengan Informasi ***Baru***
   – Mengeliminasi Hasil yang Pasti
3. $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \text{ dan } B)}{P(B)}$

Peluang Bersyarat menggunakan Diagram Venn



Peluang Bersyarat menggunakan Tabel Kontingensi

Eksperimen : Tarik 1 Kartu. Catat Macam, Warna dan Rupa Kartu.

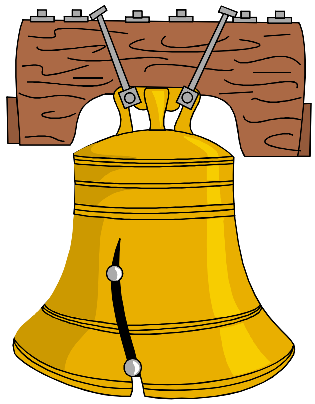
Jenis	Warna: Merah	Warna: Hitam	Total
As	2	2	4
Non-As	24	24	48
Total	26	26	52

Ruang Sampel Revisi

$$P(\text{As} \mid \text{Hitam}) = \frac{P(\text{As DAN Hitam})}{P(\text{Hitam})} = \frac{2/52}{26/52} = \frac{2}{26}$$

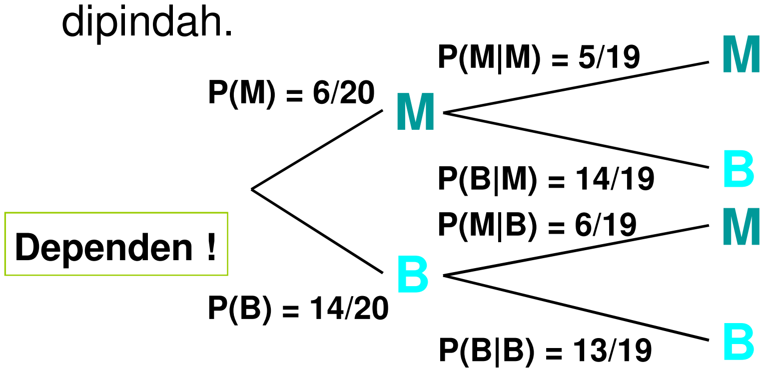
Independensi secara Statistik

1. Adanya suatu Kejadian *Tidak* mempengaruhi peluang kejadian yang lain
   - Pelemparan 1 koin sebanyak dua kali
2. Pengujian untuk
   - P(A | B) = P(A)
   - P(A dan B) = P(A)*P(B)



Tree Diagram

Eksperimen : Pilih 2 pena dari 20 pena : 14 berwarna biru dan 6 merah. Jangan dipindah.



Tantangan Berpikir

Dengan menggunakan Tabel kemudian Rumus, Berapakah peluangnya ?

P(A|D) =

P(C|B) =

Apakah C & B Independen ?

Kejadian	Kejadian C	Kejadian D	Total
A	4	2	6
B	1	3	4
Total	5	5	10

Solusi *

Menggunakan Rumus, Peluangnya adalah :

$$P(A \mid D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{2/10}{5/10} = \frac{2}{5}$$

$$P(C \mid B) = \frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{1/10}{4/10} = \frac{1}{4}$$

Dependen

Aturan Multiplikatif

Aturan Multiplikatif

1. Digunakan untuk mendapatkan Peluang Gabungan *Interseksi* suatu Kejadian
   - Disebut dengan Kejadian Gabungan (Joint Events)
2. $P(A \text{ dan } B) = P(A \cap B)$
   $= P(A)*P(B|A)$
   $= P(B)*P(A|B)$
3. Untuk Kejadian Independen :
   $P(A \text{ dan } B) = P(A \cap B) = P(A)*P(B)$

Contoh Aturan Multiplikatif

Eksperimen : Tarik 1 Kartu. Catat Macam, Warna dan Rupa Kartu.

Jenis	Warna		Total
	Merah	Hitam	
As	2	2	4
Non-As	24	24	48
Total	26	26	52

$$P(\text{As DAN Hitam}) = P(\text{As}) \cdot P(\text{Hitam} \mid \text{As})$$

$$= \left(\frac{4}{52}\right)\left(\frac{2}{4}\right) = \left(\frac{2}{52}\right)$$

Tantangan Berpikir

Menggunakan Aturan Multiplikatif, Berapakah Peluangnya ?

$P(C \cap B)$ =

$P(B \cap D)$ =

$P(A \cap B)$ =

Kejadian	Kejadian		Total
	C	D	
A	4	2	6
B	1	3	4
Total	5	5	10

Solusi *

Menggunakan Aturan Multiplikatif, Peluangnya adalah :

$$P(C \cap B) = P(C) \cdot P(B|C) = 5/10 * 1/5 = 1/10$$

$$P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D|B) = 4/10 * 3/4 = 3/10$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = 0$$

SOAL

1. Sebuah mata uang dilemparkan 2 kali. Berapa peluangnya bahwa paling sedikit muncul sekali muka?
2. Sebuah dadu diberati sedemikian rupa sehingga kemungkinan muncul suatu bilangan genap dua kali lebih besar daripada kemungkinan muncul suatu bilangan ganjil. Bila K menyatakan kejadian munculnya suatu bilangan yang lebih kecil dari 4 dalam satu kali lemparan, hitunglah peluang K atau P(K)
3. Satu kartu ditarik dari satu kotak kartu bridge (berisi 2), hitunglah peluangnya bahwa kartu itu heart
4. Suatu mata uang setangkup dilemparkan beturut-turut sebanyak 6 kali. Berapa peluangnya paling sedikit sekali muncul muka?