



SPK: Linear Programming

Tri Hadiah Muliawati
PENS - 2025

Overview



Linear Programming (LP)

LP adalah salah satu metode riset operasi yang sudah ada sejak dulu dan masih banyak digunakan di industri untuk menyelesaikan permasalahan yang bisa diformulasikan secara matematis dan memiliki karakteristik linear.

Suatu permasalahan termasuk LP jika:

- Fungsi objektifnya linear (tanpa kuadrat, eksponen, atau interaksi variabel)
- Kendala linear dalam bentuk $\leq$, $\geq$, $=$
- Variabel keputusan bersifat numerik



Elemen LP

1. *Decision Variable* (1, 2, ... n) / Variabel Keputusan
2. *Objective function* / Fungsi objektif
3. *Constraints* (1, 2, ... m) / Batasan / Kendala

$$\begin{array}{lll} \min & f(x_1, x_2, \dots, x_n) & \text{(objective function)} \\ \text{s.t.} & g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i & \forall i = 1, \dots, m \quad \text{(constraints)} \\ & x_j \in \mathbb{R} & \forall j = 1, \dots, n. \quad \text{(decision variable)} \end{array}$$



Elemen LP - *Decision Variable*

- Variabel yang perlu ditentukan nilainya agar mencapai nilai *objective function* yang diinginkan.
- Misal:
 - Jumlah produk yang ingin diproduksi untuk tiap jenisnya,
 - Besaran harga per unit untuk tiap jenis produk, dsb.



Elemen LP - *Objective Function*

- Fungsi untuk menggambarkan tujuan yang ingin dicapai.
- Sifatnya memaksimalkan atau meminimalkan sesuatu.
- Misal:
 - Memaksimalkan profit yang didapatkan,
 - Meminimalkan biaya yang dikeluarkan, dsb



Elemen LP - *Constraints*

- Batasan yang dialami / dimiliki untuk mencapai *objective function*
- Terdiri atas *functional constraint* dan *signed constraint*
- Misal:
 - Jumlah modal yang dimiliki,
 - Jumlah waktu yang tersedia untuk produksi,
 - Jumlah ketersediaan bahan baku, dsb.



Formulasi atau Pemodelan LP

Untuk bisa diselesaikan dengan mudah, maka suatu permasalahan dengan karakteristik linear perlu diformulasikan / dimodelkan secara matematis.

Salah satu permasalahan yang umum dimodelkan dengan LP adalah permasalahan kombinasi produk (product mix problem), dimana:

- Ada beberapa jenis produk yang akan diproduksi
- Tiap produk yang akan dibuat membutuhkan sumber daya, sedangkan sumber daya terbatas
- Kita ingin memaksimalkan keuntungan total dengan sumber daya yang terbatas tsb.



Formulasi atau Pemodelan LP

Berikut merupakan hal yang perlu diperhatikan ketika memformulasikan LP:

- Definisikan *decision variable* di awal
- Tuliskan *objective function* sebelum menuliskan *constraint*
- Gunakan unit pengukuran yang sama
- Tuliskan komentar di akhir tiap *constraint* untuk memperjelas
- *Functional constraint* dituliskan sebelum *signed constraint*



Contoh 1

Perusahaan Berkah Furniture yang akan membuat meja dan kursi. Keuntungan yang diperoleh dari satu unit meja adalah Rp. 70.000,- sedang keuntungan yang diperoleh dari satu unit kursi adalah Rp. 50.000,-. Namun untuk meraih keuntungan tersebut Berkah Furniture menghadapi kendala keterbatasan jam kerja.

Untuk pembuatan 1 unit meja dia memerlukan 4 jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit kursi dia membutuhkan 3 jam kerja. Untuk pengecatan 1 unit meja dibutuhkan 30 menit, dan untuk pengecatan 1 unit kursi dibutuhkan 45 menit. Jumlah jam kerja yang tersedia untuk pembuatan meja dan kursi adalah 200 jam per minggu sedang jumlah jam kerja untuk pengecatan adalah 40 jam per minggu. Berapa jumlah meja dan kursi yang sebaiknya diproduksi per minggu agar keuntungan perusahaan maksimum?

Contoh 1

Penentuan *decision variable*

Perusahaan Berkah Furniture yang akan membuat meja dan kursi. Keuntungan yang diperoleh dari satu unit meja adalah Rp. 70.000,- sedang keuntungan yang diperoleh dari satu unit kursi adalah Rp. 50.000,-. Namun untuk meraih keuntungan tersebut Berkah Furniture menghadapi kendala keterbatasan jam kerja.

Untuk pembuatan 1 unit meja dia memerlukan 4 jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit kursi dia membutuhkan 3 jam kerja. Untuk pengecatan 1 unit meja dibutuhkan 30 menit, dan untuk pengecatan 1 unit kursi dibutuhkan 45 menit. Jumlah jam kerja yang tersedia untuk pembuatan meja dan kursi adalah 200 jam per minggu sedang jumlah jam kerja untuk pengecatan adalah 40 jam per minggu. **Berapa jumlah meja dan kursi yang sebaiknya diproduksi per minggu agar keuntungan perusahaan maksimum?**

Decision variable:

Jumlah meja yang diproduksi = x

Jumlah kursi yang diproduksi = y

Contoh 1

Penentuan *objective function*

Perusahaan Berkah Furniture yang akan membuat meja dan kursi.

Keuntungan yang diperoleh dari satu unit meja adalah Rp. 70.000,-

sedang keuntungan yang diperoleh dari satu unit kursi adalah Rp.

50.000,-. Namun untuk meraih keuntungan tersebut Berkah Furniture menghadapi kendala keterbatasan jam kerja.

Untuk pembuatan 1 unit meja dia memerlukan 4 jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit kursi dia membutuhkan 3 jam kerja. Untuk pengecatan 1 unit meja dibutuhkan 30 menit, dan untuk pengecatan 1 unit kursi dibutuhkan 45 menit. Jumlah jam kerja yang tersedia untuk pembuatan meja dan kursi adalah 200 jam per minggu sedang jumlah jam kerja untuk pengecatan adalah 40 jam per minggu. **Berapa jumlah meja dan kursi yang sebaiknya diproduksi per minggu agar keuntungan perusahaan maksimum?**

Decision variable:

Jumlah meja yang diproduksi = x

Jumlah kursi yang diproduksi = y

Objective function:

$$\max f(x,y) = 70000x + 50000y$$

Contoh 1

Penentuan *functional constraint* (gunakan unit pengukuran yang sama)

Perusahaan Berkah Furniture yang akan membuat meja dan kursi. Keuntungan yang diperoleh dari satu unit meja adalah Rp. 70.000,- sedang keuntungan yang diperoleh dari satu unit kursi adalah Rp. 50.000,-. Namun untuk meraih keuntungan tersebut Berkah Furniture menghadapi kendala keterbatasan jam kerja.

Untuk pembuatan 1 unit meja dia memerlukan 4 jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit kursi dia membutuhkan 3 jam kerja. Untuk pengecatan 1 unit meja dibutuhkan 30 menit, dan untuk pengecatan 1 unit kursi dibutuhkan 45 menit. Jumlah jam kerja yang tersedia untuk pembuatan meja dan kursi adalah 200 jam per minggu sedang jumlah jam kerja untuk pengecatan adalah 40 jam per minggu. Berapa jumlah meja dan kursi yang sebaiknya diproduksi per minggu agar keuntungan perusahaan maksimum?

Decision variable:

Jumlah meja yang diproduksi = x

Jumlah kursi yang diproduksi = y

Objective function:

$$\max f(x,y) = 70000x + 50000y$$

Constraint:

$$4x + 3y \leq 200 \text{ (jam kerja pembuatan)}$$

Contoh 1

Penentuan *functional constraint* (gunakan unit pengukuran yang sama)

Perusahaan Berkah Furniture yang akan membuat meja dan kursi. Keuntungan yang diperoleh dari satu unit meja adalah Rp. 70.000,- sedang keuntungan yang diperoleh dari satu unit kursi adalah Rp. 50.000,-. Namun untuk meraih keuntungan tersebut Berkah Furniture menghadapi kendala keterbatasan jam kerja.

Untuk pembuatan 1 unit meja dia memerlukan 4 jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit kursi dia membutuhkan 3 jam kerja. Untuk pengecatan 1 unit meja dibutuhkan 30 menit, dan untuk pengecatan 1 unit kursi dibutuhkan 45 menit. Jumlah jam kerja yang tersedia untuk pembuatan meja dan kursi adalah 200 jam per minggu sedang jumlah jam kerja untuk pengecatan adalah 40 jam per minggu. Berapa jumlah meja dan kursi yang sebaiknya diproduksi per minggu agar keuntungan perusahaan maksimum?

Decision variable:

Jumlah meja yang diproduksi = x

Jumlah kursi yang diproduksi = y

Objective function:

$$\max f(x,y) = 70000x + 50000y$$

Constraint:

$$4x + 3y \leq 200 \text{ (jam kerja pembuatan)}$$

$$0.5x + 0.75y \leq 40 \text{ (jam kerja pengecatan)}$$

Contoh 1

Penentuan *signed constraint*

Perusahaan Berkah Furniture yang akan membuat meja dan kursi. Keuntungan yang diperoleh dari satu unit meja adalah Rp. 70.000,- sedang keuntungan yang diperoleh dari satu unit kursi adalah Rp. 50.000,-. Namun untuk meraih keuntungan tersebut Berkah Furniture menghadapi kendala keterbatasan jam kerja.

Untuk pembuatan 1 unit meja dia memerlukan 4 jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit kursi dia membutuhkan 3 jam kerja. Untuk pengecatan 1 unit meja dibutuhkan 30 menit, dan untuk pengecatan 1 unit kursi dibutuhkan 45 menit. Jumlah jam kerja yang tersedia untuk pembuatan meja dan kursi adalah 200 jam per minggu sedang jumlah jam kerja untuk pengecatan adalah 40 jam per minggu. Berapa jumlah meja dan kursi yang sebaiknya diproduksi per minggu agar keuntungan perusahaan maksimum?

Decision variable:

Jumlah meja yang diproduksi = x

Jumlah kursi yang diproduksi = y

Objective function:

$$\max f(x,y) = 70000x + 50000y$$

Constraint:

$$4x + 3y \leq 200 \text{ (jam kerja pembuatan)}$$

$$0.5x + 0.75y \leq 40 \text{ (jam kerja pengecatan)}$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$



Latihan

Tentukan *decision variable*, *objective function*, dan *constraint* dari studi kasus tersebut!

Perusahaan Smile Bakery yang akan membuat 2 jenis kue, yakni kue A dan kue B. Keuntungan yang diperoleh dari satu kue A adalah Rp. 25000,- sedang keuntungan yang diperoleh dari satu kue B adalah Rp. 40.000,-. Tiap jenis kue memiliki kebutuhan yang berbeda, yakni:

- Kue A membutuhkan 1 bungkus terigu, 1 jam pengerjaan manual, dan 50 menit pengerjaan oleh mesin
- Kue B membutuhkan 2 bungkus terigu, 2 jam pengerjaan manual, dan 30 menit pengerjaan oleh mesin

Per harinya, perusahaan tersebut memiliki 5 mesin yang masing-masing mampu bekerja selama 6 jam dan 10 pekerja yang masing-masing mampu bekerja selama 8 jam. Sedangkan, stok terigu yang dimiliki oleh perusahaan adalah 1000 bungkus. Apabila semua kue selalu terjual habis per harinya, berapa jumlah masing-masing kue yang perlu diproduksi agar

Metode Penyelesaian: Pendekatan Grafis



Metode penyelesaian: *Graphical Approach*

LP yang memiliki 2 variabel dapat diselesaikan dengan pendekatan grafis. Tahapan penyelesaian menggunakan pendekatan grafis:

1. Gambarkan area yang mengandung penyelesaian,
Gambarkan tiap fungsi constraint dan hitung titik perpotongannya
2. Masukkan titik perpotongan tersebut ke dalam objective function
3. Titik yang menghasilkan nilai objective terbaik adalah solusi yang paling optimum

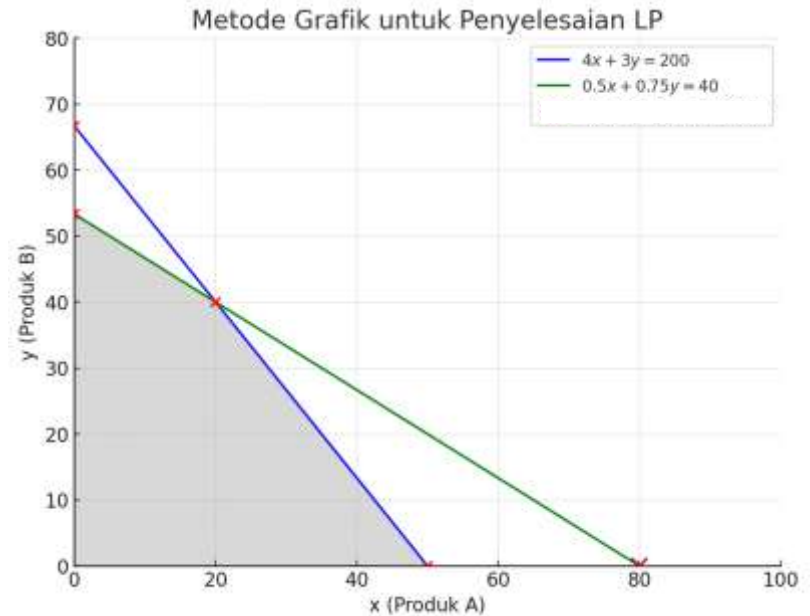
Solusi Contoh 1: Pendekatan Grafis

Objective function:

$$\max f(x,y) = 70000x + 50000y$$

Constraints:

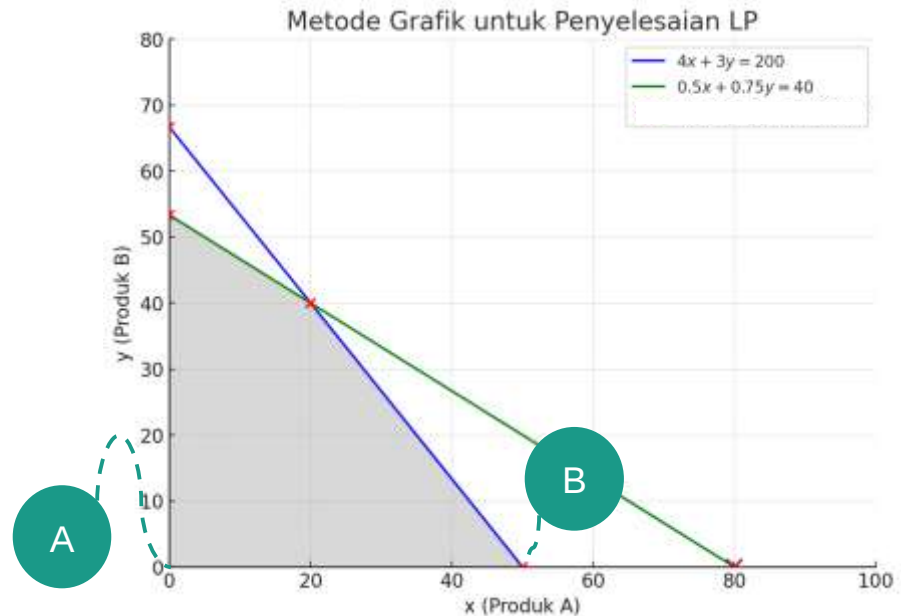
- $4x + 3y \leq 200$ (jam kerja pembuatan)
- $0.5x + 0.75y \leq 40$ (jam kerja pengecatan)
- $x \geq 0$
- $y \geq 0$



Solusi Contoh 1: Pendekatan Grafis

Titik potong (x, y):

- A (0, 0)
 - B (??, ??)
1. Substitusikan masing-masing variabel pada $4x + 3y = 200$ dengan nilai 0.
 2. Hasil substitusi berupa titik (0, 66) dan (50, 0)
 3. Titik B adalah (50, 0)

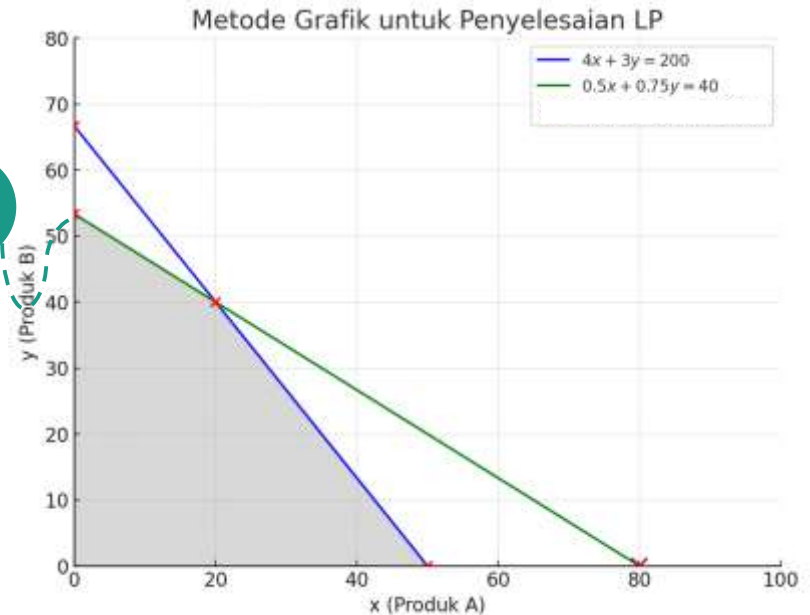


Solusi Contoh 1: Pendekatan Grafis

Titik potong (x, y):

- C (??, ??)
1. Substitusikan masing-masing variabel pada $0.5x + 0.75y = 40$ dengan nilai 0.
 2. Hasil substitusi berupa titik (0, 53) dan (80, 0)
 3. Titik C adalah (0, 53)

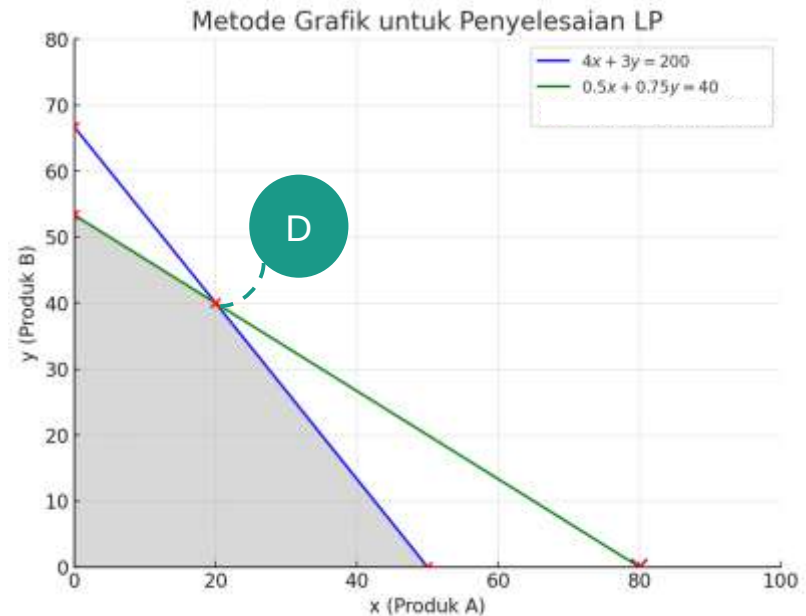
C



Solusi Contoh 1: Pendekatan Grafis

Titik potong (x, y):

- D (??, ??)
Titik perpotongan antara $4x + 3y = 200$ dan $0.5x + 0.75y = 40$ bisa dihitung menggunakan metode substitusi atau metode eliminasi gauss



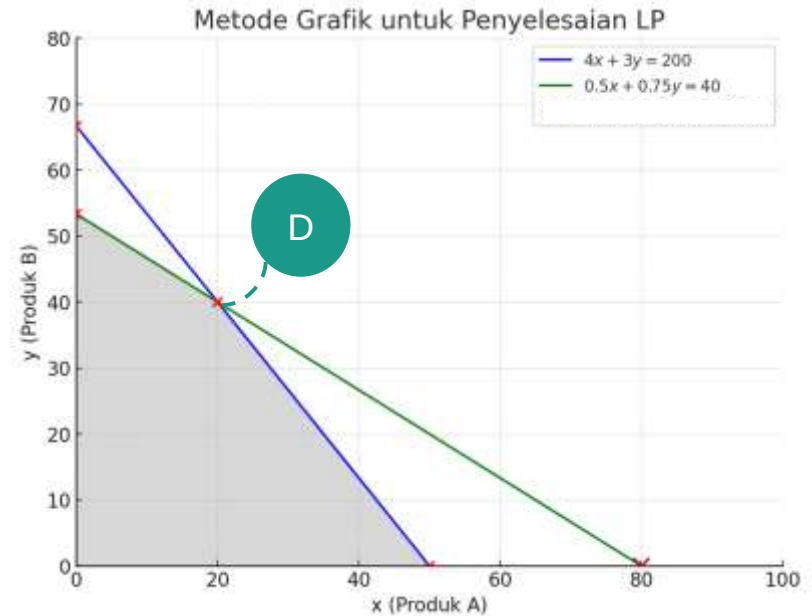
Solusi Contoh 1: Pendekatan Grafis

Titik potong (x, y):

- D (??, ??)
- Koefisien x

4x	+	3y	= 200
	x 1		
0.5x	+	0.75y	= 40
	x 8		
=====			
4x	+	3y	= 200
4x	+	6y	= 320
		(-)	
=====			
		-3y	= -120
		y	= 40
- Koefisien y

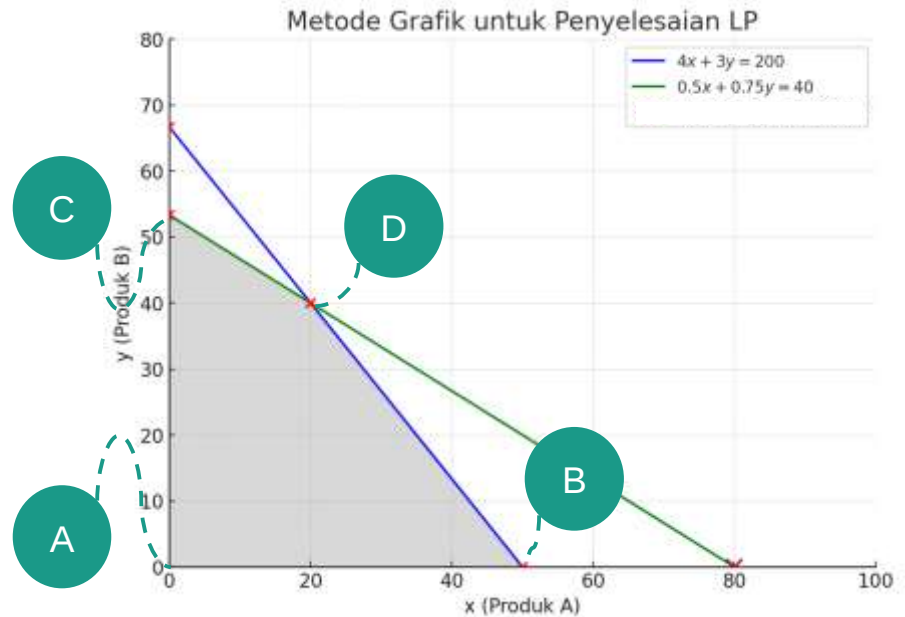
4x	+	3(40)	= 200
		4x	= 200 -
120			
		x	= 20
- Titik D adalah (20, 40)



Solusi Contoh 1: Pendekatan Grafis

Titik potong (x, y):

- A (0, 0)
- B (53, 0)
- C (0, 66)
- D (20, 40)

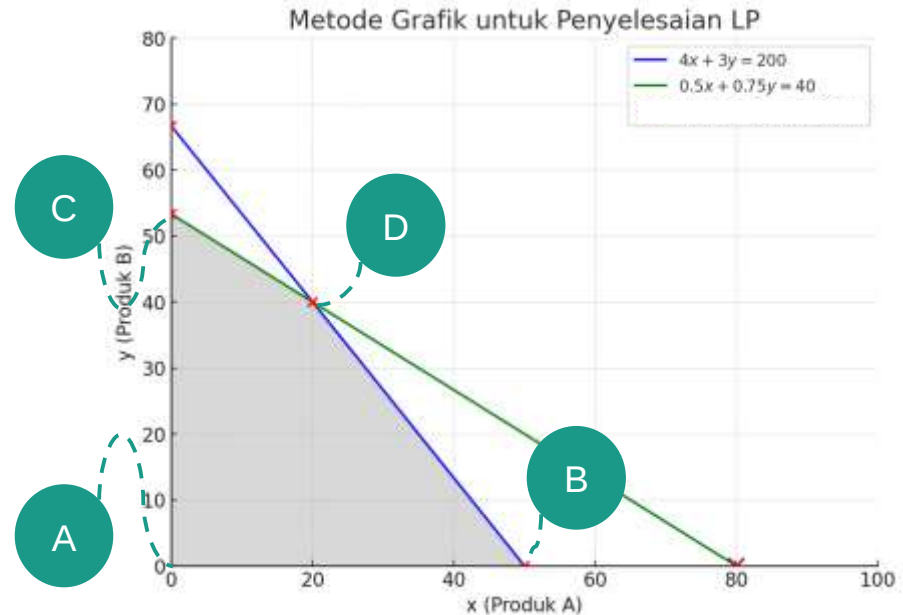


Solusi Contoh 1: Pendekatan Grafis

Evaluasi objective function
 $\max f(x,y) = 70000x + 50000y$:

- A (0, 0) = $70000(0) + 50000(0) = 0$
- B (53, 0) = $70000(53) + 50000(0) = 3500000$
- C (0, 66) = $70000(0) + 50000(66) = 3300000$
- D (20, 40) = $70000(20) + 50000(40) = 3400000$

Solusi optimum didapatkan ketika $x = 53$ dan $y = 0$





Contoh 2

- Suatu perusahaan akan memproduksi 2 macam barang yang jumlahnya tidak boleh lebih dari 18 unit. Keuntungan dari produk I dan produk II adalah Rp. 7500,- dan Rp. 4250,- per unit.
- Dari survey terlihat bahwa produk I harus dibuat sekurang kurangnya 5 unit, sedangkan produk II sekurang kurangnya 3 unit.
- Mengingat bahan baku yang ada maka jumlah produk kumulatif yang dapat dibuat paling sedikitnya 10 unit.
- Tentukan banyaknya produk yang harus dibuat untuk mendapatkan keuntungan yang maksimum ?

Contoh 2

- Suatu perusahaan akan memproduksi 2 macam barang yang jumlahnya tidak boleh lebih dari 18 unit. Keuntungan dari produk I dan produk II adalah Rp. 7500,- dan Rp. 4250,- per unit.
- Dari survey terlihat bahwa produk I harus dibuat sekurang-kurangnya 5 unit, sedangkan produk II sekurang-kurangnya 3 unit.
- Mengingat bahan baku yang ada maka jumlah produk kumulatif yang dapat dibuat paling sedikitnya 10 unit.
- Tentukan banyaknya produk yang harus dibuat untuk mendapatkan keuntungan yang maksimum ?

Decision variable:

Jumlah produk I yang diproduksi = x_1

Jumlah produk II yang diproduksi = x_2

Objective function:

maks $f(x_1, x_2) = 7500x_1 + 4250x_2$

Contoh 2

- Suatu perusahaan akan memproduksi 2 macam barang yang jumlahnya tidak boleh lebih dari 18 unit. Keuntungan dari produk I dan produk II adalah Rp. 7500,- dan Rp. 4250,- per unit.
- Dari survey terlihat bahwa produk I harus dibuat sekurang-kurangnya 5 unit, sedangkan produk II sekurang-kurangnya 3 unit.
- Mengingat bahan baku yang ada maka jumlah produk kumulatif yang dapat dibuat paling sedikitnya 10 unit.
- Tentukan banyaknya produk yang harus dibuat untuk mendapatkan keuntungan yang maksimum ?

Decision variable:

Jumlah produk I yang diproduksi = x_1

Jumlah produk II yang diproduksi = x_2

Objective function:

maks $f(x_1, x_2) = 7500x_1 + 4250x_2$

Constraint

$x_1 + x_2 \leq 18$ (total unit produk)

$x_1 + x_2 \geq 10$ (total unit produk)

Contoh 2

- Suatu perusahaan akan memproduksi 2 macam barang yang jumlahnya tidak boleh lebih dari 18 unit. Keuntungan dari produk I dan produk II adalah Rp. 7500,- dan Rp. 4250,- per unit.
- Dari survey terlihat bahwa produk I harus dibuat sekurang-kurangnya 5 unit, sedangkan produk II sekurang-kurangnya 3 unit.
- Mengingat bahan baku yang ada maka jumlah produk kumulatif yang dapat dibuat paling sedikitnya 10 unit.
- Tentukan banyaknya produk yang harus dibuat untuk mendapatkan keuntungan yang maksimum ?

Decision variable:

Jumlah produk I yang diproduksi = x_1

Jumlah produk II yang diproduksi = x_2

Objective function:

maks $f(x_1, x_2) = 7500x_1 + 4250x_2$

Constraint:

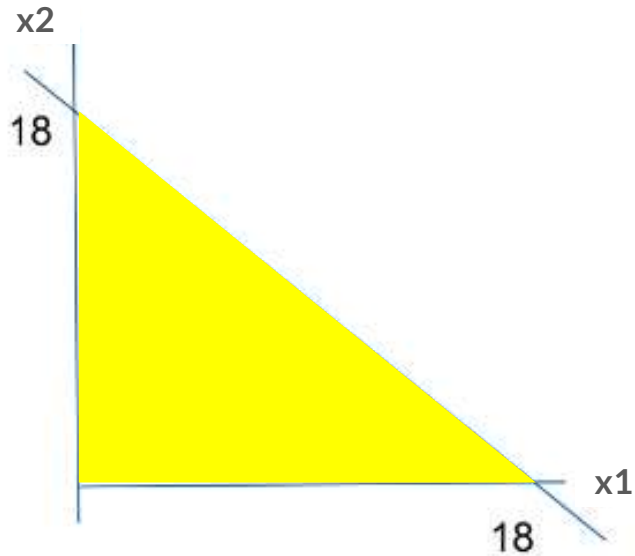
$x_1 + x_2 \leq 18$ (total unit produk)

$x_1 + x_2 \geq 10$ (total unit produk)

$x_1 \geq 5$ (total unit produk I)

$x_2 \geq 3$ (total unit produk II)

Solusi Contoh 2: Pendekatan Grafis



Decision variable:

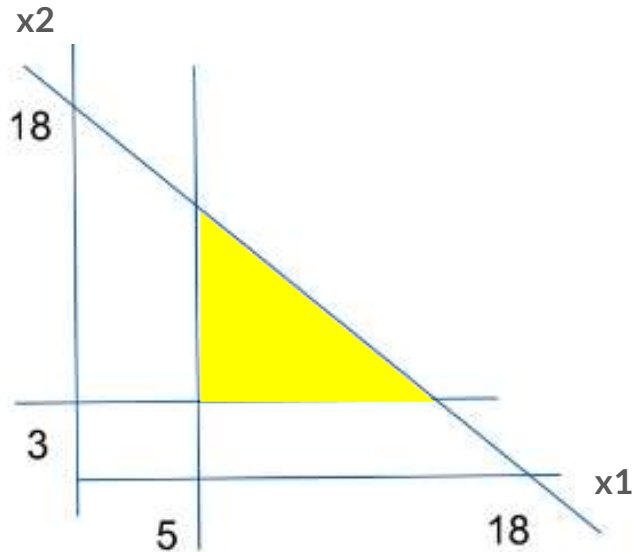
Jumlah produk I yang diproduksi = x_1

Jumlah produk II yang diproduksi = x_2

Constraint:

$x_1 + x_2 \leq 18$ (total unit produk)

Solusi Contoh 2: Pendekatan Grafis



Decision variable:

Jumlah produk I yang diproduksi = x_1

Jumlah produk II yang diproduksi = x_2

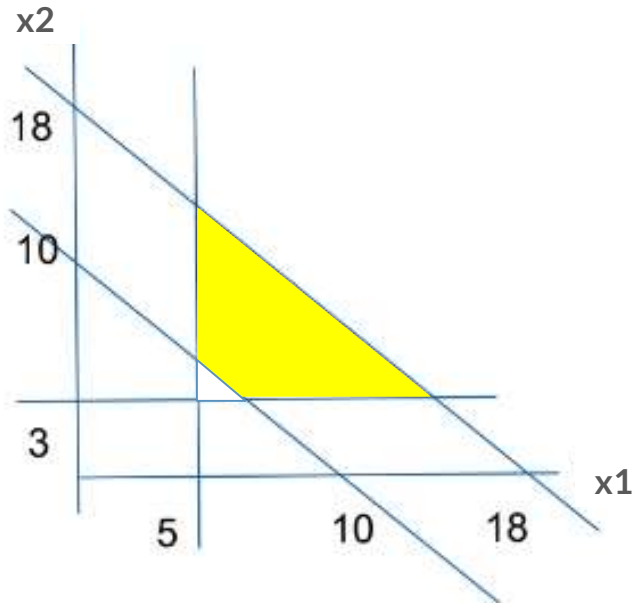
Constraint:

$x_1 + x_2 \leq 18$ (total unit produk)

$x_1 \geq 5$ (total unit produk I)

$x_2 \geq 3$ (total unit produk II)

Solusi Contoh 2: Pendekatan Grafis



Decision variable:

Jumlah produk I yang diproduksi = x_1

Jumlah produk II yang diproduksi = x_2

Constraint:

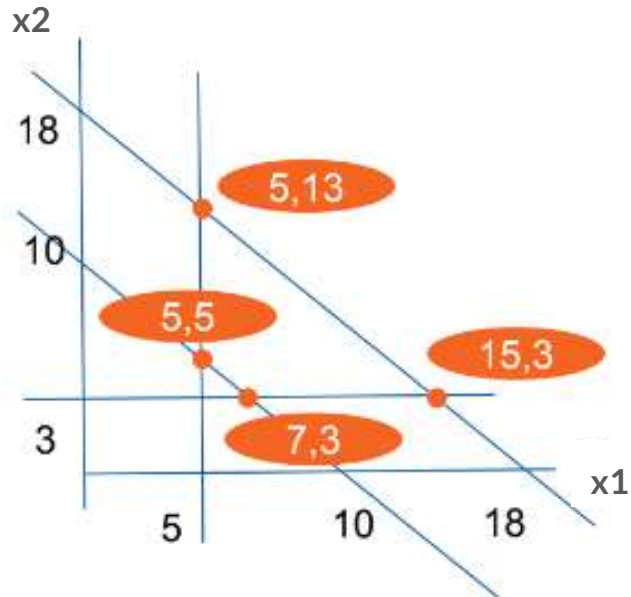
$x_1 + x_2 \leq 18$ (total unit produk)

$x_1 \geq 5$ (total unit produk I)

$x_2 \geq 3$ (total unit produk II)

$x_1 + x_2 \geq 10$ (total unit produk)

Solusi Contoh 2: Pendekatan Grafis



Objective function: maks $f(x_1, x_2) = 7500x_1 + 4250x_2$

Titik	Koordinat	Objective value
A	(5,5)	$7500(5) + 4250(5) = 58750$
B	(5,13)	$7500(5) + 4250(13) = 92750$
C	(7,3)	$7500(7) + 4250(3) = 65250$
D	(15,3)	$7500(15) + 4250(3) = 125250$

Metode Penyelesaian: Metode Simplex

Simplex Method

Tableau



		x_1	x_2	s_1	s_2		
Basis	c_B	7	6	0	0	b	Ratio
s_1	0	2	4	1	0	16	$16/2 = 8$
s_2	0	3	2	0	1	12	$12/3 = 4$
	z_j	0	0	0	0	0	
	$c_j - z_j$	7	6	0	0		

1. Inisialisasi:

- a. Tentukan *decision variable*, *objective function*, dan *constraint*.
- b. Ubah bentuk persamaan menjadi bentuk standar.

2. Bentuk *initial simplex table*:

Susun tabel Simplex yang berisi koefisien dari *decision variable*, *objective function*, *constraint*, serta *slack* dan *surplus variable* (jika ada).

3. Pilih *pivot column*:

Pilih kolom dengan koefisien *positif* terbesar di baris $c_j - z_j$

4. Pilih *pivot row*:

- a. Hitung rasio / hasil bagi antara konstanta di kolom kanan (solusi) dengan elemen di kolom pivot (hanya untuk elemen positif).
- b. Pilih baris dengan rasio terkecil.

5. Lakukan pivot:

Lakukan operasi baris (*row elemental operation*) untuk membuat *pivot element* menjadi 1 dan semua elemen lainnya di *pivot column* menjadi 0.

6. Iterasi:

Lakukan iterasi jika ada koefisien positif pada baris $c_j - z_j$, ulangi langkah 3-5. Solusi optimal tercapai bila semua koefisien pada baris tsb bernilai ≤ 0 .

7. Solusi optimal:

Baca nilai kolom solusi dari tabel Simplex.

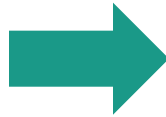
Solusi Contoh 1: Pendekatan Simplex

Objective function:

$$\max f(x,y) = z = 70000x + 50000y$$

Constraints:

- $4x + 3y \leq 200$ (jam kerja pembuatan)
- $0.5x + 0.75y \leq 40$ (jam kerja pengecatan)
- $x \geq 0$
- $y \geq 0$



Objective function:

$$\max 70000x + 50000y + 0s_1 + 0s_2$$

Constraints:

- $4x + 3y + s_1 = 200$
- $0.5x + 0.75y + s_2 = 40$
- $x, y, s_1, s_2 \geq 0$

Solusi Contoh 1: Pendekatan Simplex

Objective function:

$$\max 70000x - 50000y + 0s1 + 0s2$$

Constraints:

- $4x + 3y + s1 = 200$
- $0.5x + 0.75y + s2 = 40$
- $x, y, s1, s2 \geq 0$



Initial Simplex table

Basis (B)	CB	x 70000	y 50000	s1 0	s2 0	Solusi (b)	Rasio
s1	0	4	3	1	0	200	50
s2	0	0,5	0,75	0	1	40	80
	zj	0	0	0	0	0	
	cj-zj	70000	50000	0	0		

x sebagai pivot column
s1 sebagai pivot row
 $x1 = 0, x2 = 0$

Perpotongan pivot column dan pivot row = pivot element
Karena masih ada nilai di baris $cj-zj > 0$, maka solusi belum optimal
 $z = 0$

Solusi Contoh 1: Pendekatan Simplex

Simplex table iterasi ke-1

Basis (B)	CB	x	y	s1	s2	Solusi (b)	Rumus
		70000	50000	0	0		
x	70000	1	0,75	0,25	0	50	$x_{\text{new}} = s1_{\text{old}} / 4$
s2	0	0	0,375	-0,125	1	15	$s2_{\text{new}} = s2_{\text{old}} - 0,5 * x_{\text{new}}$
	z_j	70000	52500	17500	0	3500000	
	$c_j - z_j$	0	-2500	-17500	0		

Ubah pivot element menjadi 1 dengan membaginya dengan 4

Ubah elemen lain pada pivot column menjadi 0 dengan menambahkan / mengurangi nilai dari baris x yang baru

Karena tidak ada nilai di baris $c_j - z_j > 0$, maka solusi sudah optimal

Solusi optimal tercapai ketika $x = 50$, $y = 0$, $s1 = 0$, dan $s2 = 15$

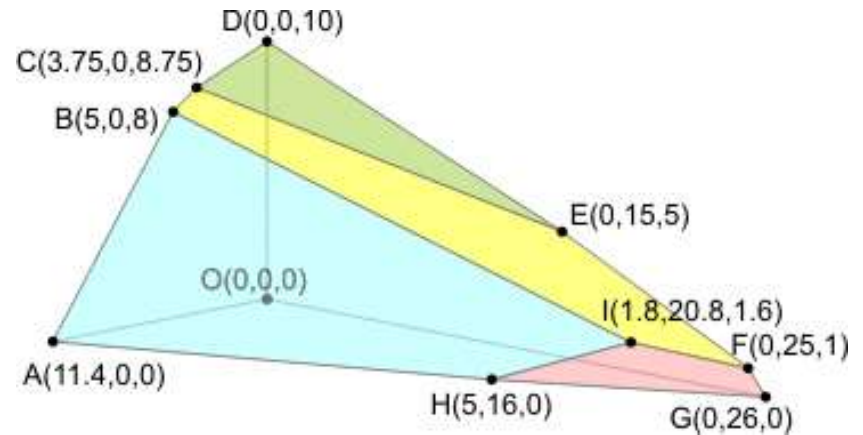
Contoh 3: LP dengan Variabel Lebih dari 2

Objective function:

$$\max f(x,y) = z = 20x_1 + 10x_2 + 15x_3$$

Constraints:

- $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 55$
- $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 26$
- $x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$
- $5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 57$
- $x_1, x_2, x_3 \geq 0$



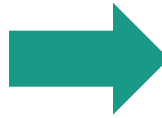
Solusi Contoh 3: Pendekatan Simplex

Objective function:

$$\max f(x,y) = z = 20x_1 + 10x_2 + 15x_3$$

Constraints:

- $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \leq 55$
- $2x_1 + x_2 + x_3 \leq 26$
- $x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 30$
- $5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 57$
- $x_1, x_2, x_3 \geq 0$



Objective function:

$$\max 20x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

Constraints:

- $3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + s_1 = 55$
- $2x_1 + x_2 + x_3 + s_2 = 26$
- $x_1 + x_2 + 3x_3 + s_3 = 30$
- $5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + s_4 = 57$
- $x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$

Initial Simplex table

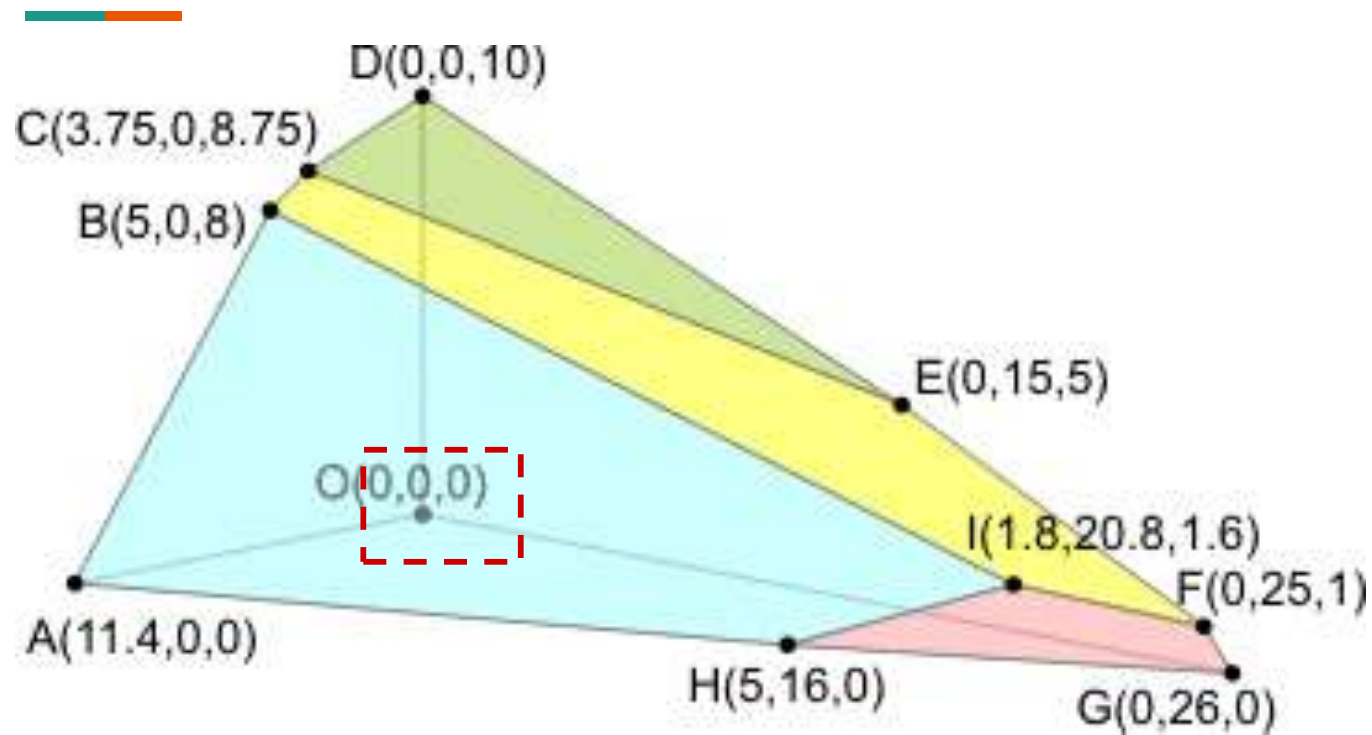
Basis (B)	CB	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	Solusi (b)
		20	10	15	0	0	0	0	
s1	0	3	2	5	1	0	0	0	55
s2	0	2	1	1	0	1	0	0	26
s3	0	1	1	3	0	0	1	0	30
s4	0	5	2	4	0	0	0	1	57
	zj	0	0	0	0	0	0	0	
	cj-zj	20	10	15	0	0	0		

Basis (B)	CB	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	Solusi (b)	Rasio
		20	10	15	0	0	0	0		
s1	0	3	2	5	1	0	0	0	55	18,33333333
s2	0	2	1	1	0	1	0	0	26	13
s3	0	1	1	3	0	0	1	0	30	30
s4	0	5	2	4	0	0	0	1	57	11,4
	zj	0	0	0	0	0	0	0	0	
	cj-zj	20	10	15	0	0	0	0		

x1 sebagai pivot column
s4 sebagai pivot row

Perpotongan pivot column dan pivot row = pivot element
Karena masih ada nilai di baris cj-zj > 0, maka solusi belum optimal

$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$
 $z = 0$



Simplex table iterasi ke-1

Basis (B)	CB	x1 20	x2 10	x3 15	s1 0	s2 0	s3 0	s4 0	Solusi (b)	Rumus
s1	0	0	0,8	2,6	1	0	0	-0,6	20,8	$s1_{new} = s1_{old} - 3 \cdot x1_{new}$
s2	0	0	0,2	-0,6	0	1	0	-0,4	3,2	$s2_{new} = s2_{old} - 2 \cdot x1_{new}$
s3	0	0	0,6	2,2	0	0	1	-0,2	18,6	$s3_{new} = s3_{old} - x1_{new}$
x1	20	1	0,4	0,8	0	0	0	0,2	11,4	$x1_{new} = s4_{old} / 5$
	zj	20	8	16	0	0	0	4	228	
	cj-zj	0	2	-1	0	0	0	-4		

Ubah pivot element menjadi 1 dengan membaginya dengan 5

Ubah elemen lain pada pivot column menjadi 0 dengan menambahkan / mengurangi nilai dari baris x1 yang baru

Basis (B)	CB	x1 20	x2 10	x3 15	s1 0	s2 0	s3 0	s4 0	Solusi (b)	Rasio
s1	0	0	0,8	2,6	1	0	0	-0,6	20,8	26
s2	0	0	0,2	-0,6	0	1	0	-0,4	3,2	16
s3	0	0	0,6	2,2	0	0	1	-0,2	18,6	31
x1	20	1	0,4	0,8	0	0	0	0,2	11,4	28,5
	zj	20	8	16	0	0	0	4	228	
	cj-zj	0	2	-1	0	0	0	-4		

Karena masih ada nilai di baris cj-zj > 0, maka solusi belum optimal

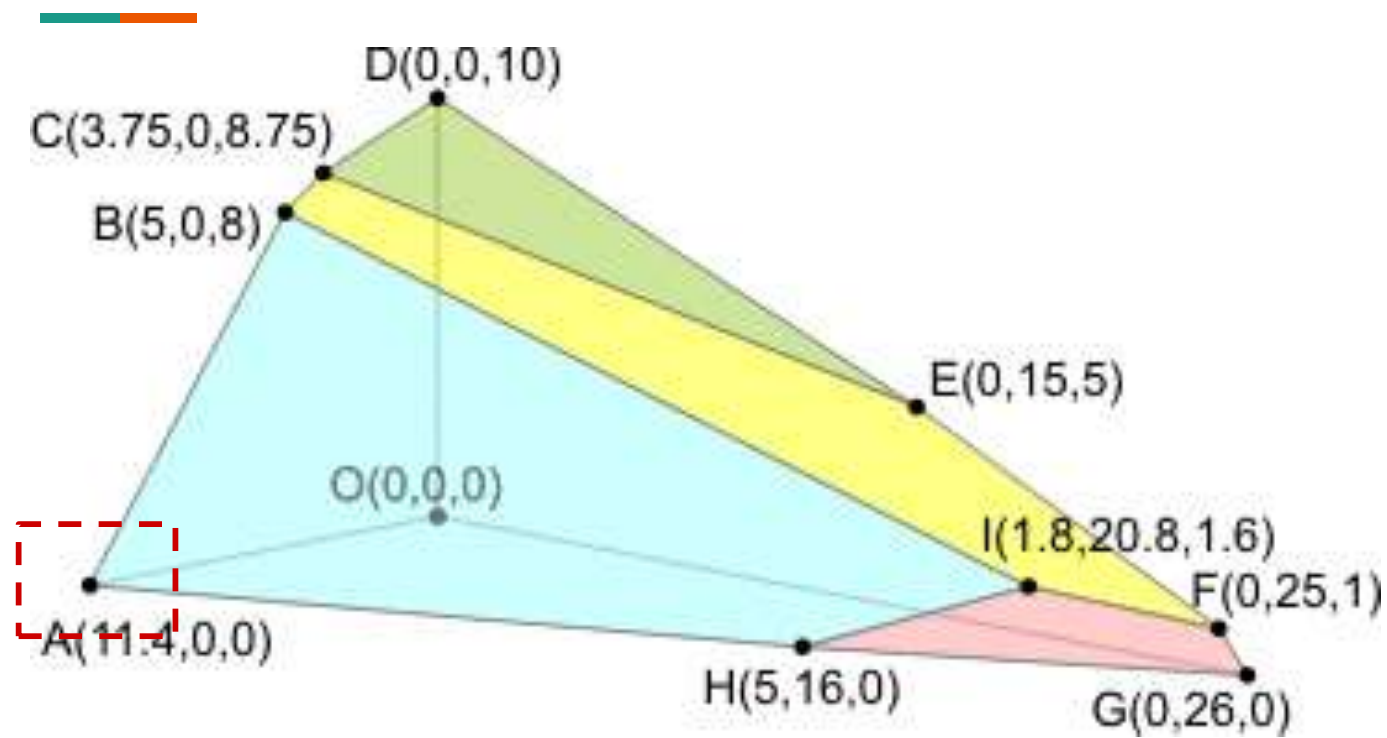
x2 sebagai pivot column

s2 sebagai pivot row

Perpotongan pivot column dan pivot row = pivot element

$$x1 = 11,4, x2 = 0, x3 = 0$$

$$z = 228$$



Simplex table iterasi ke-2

Basis (B)	CB	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	Solusi (b)	Rumus
		20	10	15	0	0	0	0		
s1	0	0	0	5	1	-4	0	1	8	$s1_{new} = s1_{old} - 0,8 * x2_{new}$
x2	10	0	1	-3	0	5	0	-2	16	$x2_{new} = s2 / 0,2$
s3	0	0	0	4	0	-3	1	1	9	$s3_{new} = s3_{old} - 0,6 * x2_{new}$
x1	20	1	0	2	0	-2	0	1	5	$x1_{new} = x1_{old} - 0,4 * x2_{new}$
	zj	20	10	10	0	10	0	0	260	
	cj-zj	0	0	5	0	-10	0	0		

Ubah pivot element menjadi 1 dengan membaginya dengan 0,2

Ubah elemen lain pada pivot column menjadi 0 dengan menambahkan / mengurangi nilai dari baris x2 yang baru

Basis (B)	CB	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	Solusi (b)	Rasio
		20	10	15	0	0	0	0		
s1	0	0	0	5	1	-4	0	1	8	1,6
x2	10	0	1	-3	0	5	0	-2	16	-5,333333333
s3	0	0	0	4	0	-3	1	1	9	2,25
x1	20	1	0	2	0	-2	0	1	5	2,5
	zj	20	10	10	0	10	0	0	260	
	cj-zj	0	0	5	0	-10	0	0		

Karena masih ada nilai di baris $cj - zj > 0$, maka solusi belum optimal

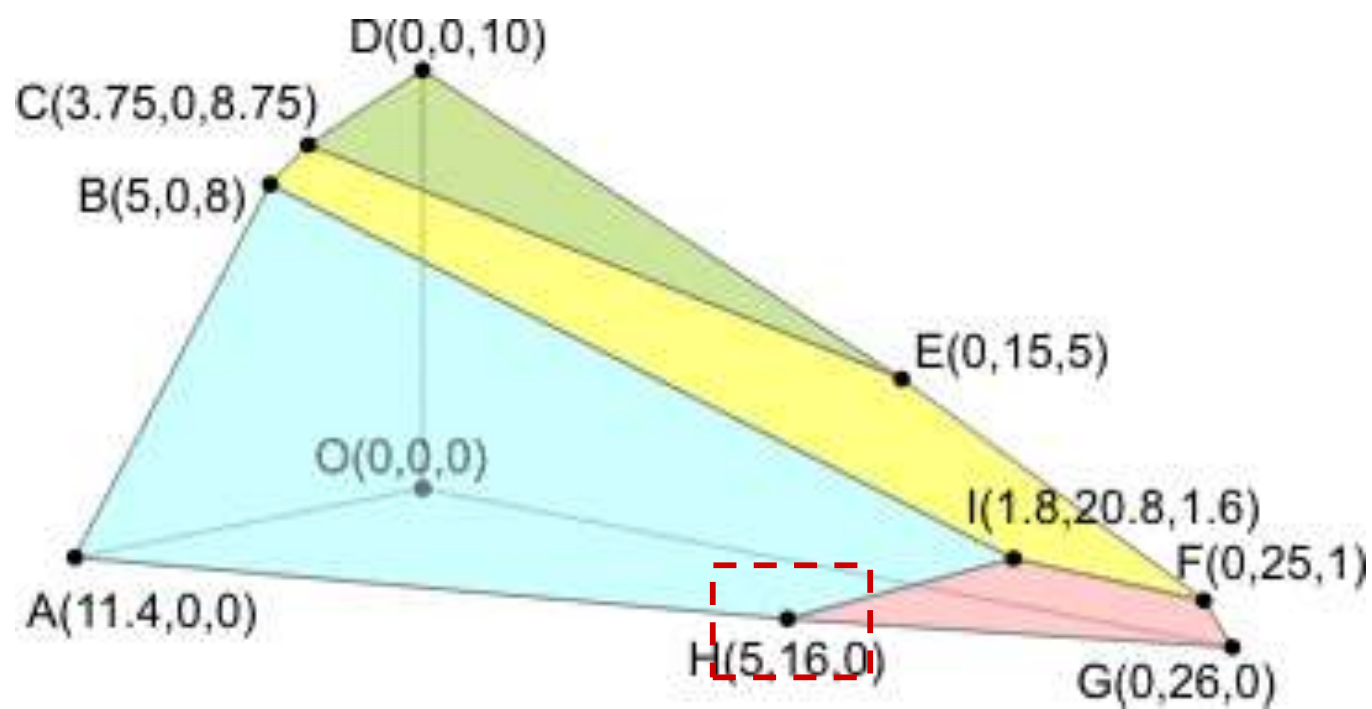
x3 sebagai pivot column

s1 sebagai pivot row

Perpotongan pivot column dan pivot row = pivot element

$$x1 = 5, x2 = 16, x3 = 0$$

$$z = 260$$



Solusi Contoh 3: Pendekatan Simplex

Simplex table iterasi ke-3

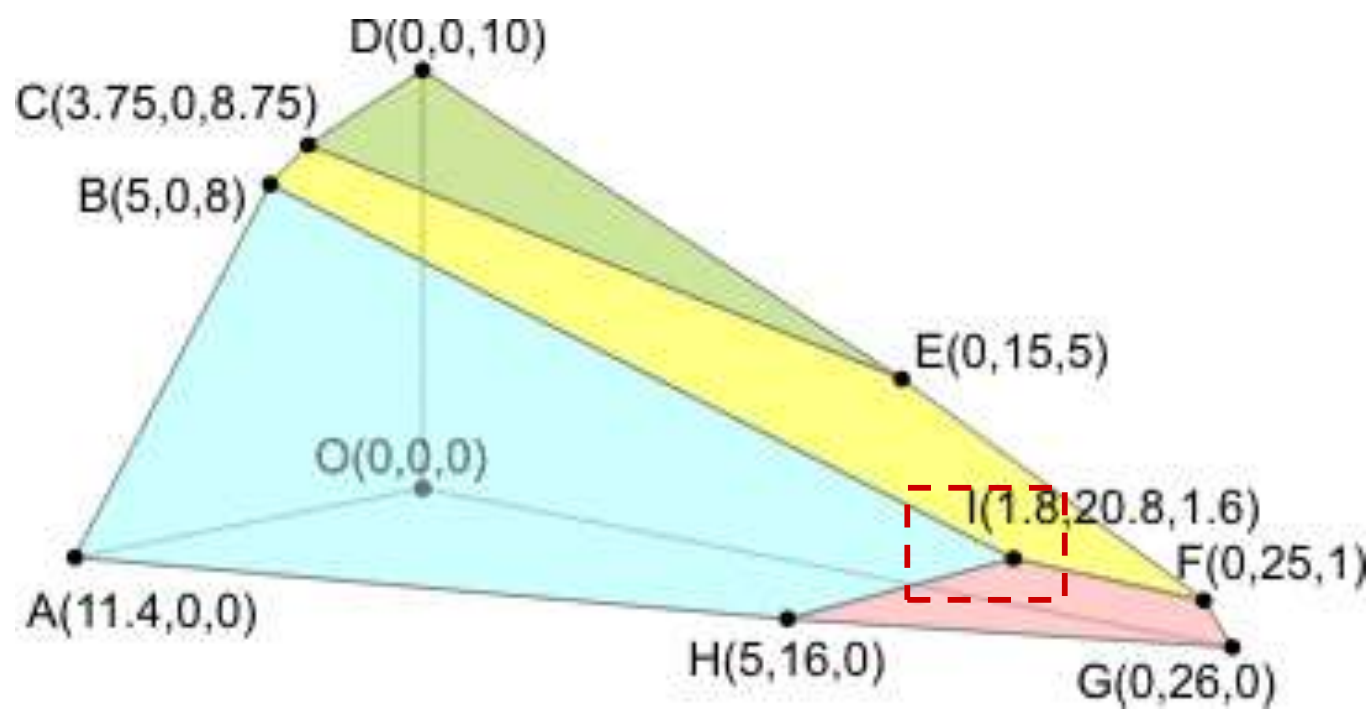
Basis (B)	CB	x1	x2	x3	s1	s2	s3	s4	Solusi (b)	Rumus
		20	10	15	0	0	0	0		
x3	15	0	0	1	0,2	-0,8	0	0,2	1,6	$x3_{new} = s1_{old}/5$
x2	10	0	1	0	0,6	2,6	0	-1,4	20,8	$x2_{new} = x2_{old} + 3*x3_{new}$
s3	0	0	0	0	-0,8	0,2	1	0,2	2,6	$s3_{new} = s3_{old} - 4*x3_{new}$
x1	20	1	0	0	-0,4	-0,4	0	0,6	1,8	$x1_{new} = x1_{old} - 2*x3_{new}$
	zj	20	10	15	1	6	0	1	268	
	cj-zj	0	0	0	-1	-6	0	-1		

Ubah pivot element menjadi 1 dengan membaginya dengan 5

Ubah elemen lain pada pivot column menjadi 0 dengan menambahkan / mengurangi nilai dari baris x yang baru

Karena tidak ada nilai di baris cj-zj > 0, maka solusi sudah optimal

Solusi optimal tercapai ketika $x1 = 1.8$, $x2 = 20.8$, $x3 = 1.6$, dan $z = 268$



Metode Penyelesaian: Software



Metode penyelesaian: *Software*

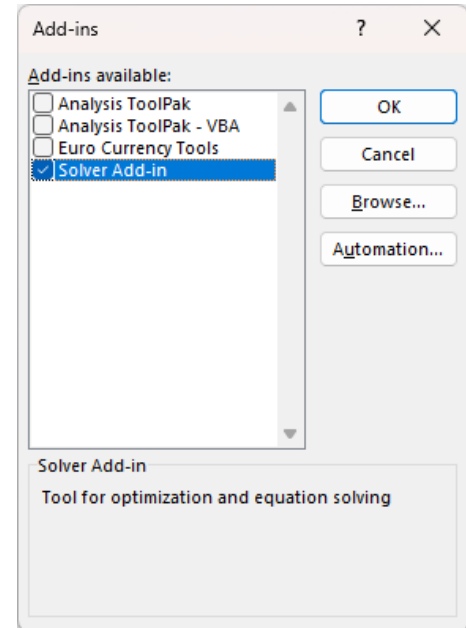
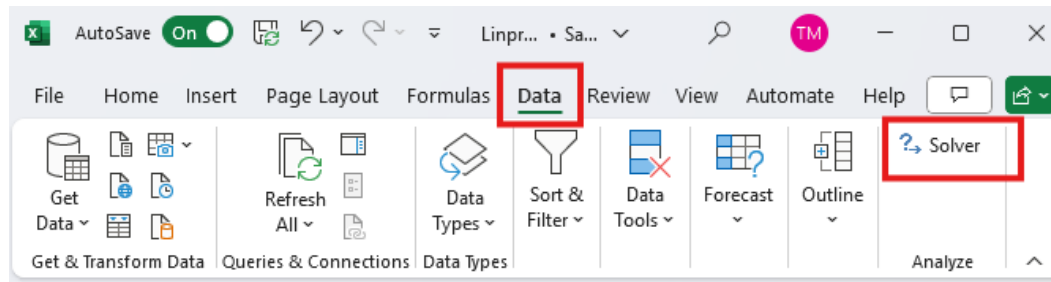
LP juga dapat diselesaikan dengan menggunakan beberapa perangkat lunak / bahasa pemrograman, antara lain:

1. Add ins Solver pada MS. Excel
2. Library `scipy.optimize` (python)
3. Library `pulp` (python)
4. dsb

Solusi Contoh 1:

Software - Add ins Solver pada Ms. Excel

- User perlu mengaktifkan terlebih dahulu add-ins **Solver** pada Ms. Excel.
- Setelah add-ins diaktifkan, user bisa mengakses fitur tersebut melalui menu **Data >> Solver**



Solusi Contoh 1: Software - Add ins Solver pada Ms. Excel

- Siapkan tabel yang berisi *objective value*, *decision variable*, dan *constraint*.
- Untuk kondisi awal nilai x dan y di-set sebagai 0.
- Pada gambar di samping, kolom D digunakan untuk menampung total nilai apabila variabel x dan y dimasukkan ke dalam *functional constraint* dan *objective function*.

	A	B	C	D	E
1	Objective function:				
2	max $f(x,y) = z = 70000x + 50000y$				
3	Constraints:				
4					
5	• $4x + 3y \leq 200$ (jam kerja pembuatan)				
6	• $0.5x + 0.75y \leq 40$ (jam kerja pengecatan)				
7	• $x \geq 0$				
8	• $y \geq 0$				
9		x	y	Total	Batas
10	Keuntungan per unit	70000	50000	0	
11	Constraint 1 ($4x+3y \leq 200$)	4	3	0	200
12	Constraint 2 ($0.5x+0.75y \leq 40$)	0,5	0,75	0	40
13		0	0		

Solusi Contoh 1: Software - Add ins Solver pada Ms. Excel

- Isi **set objective** dengan kode cell yang berisi perhitungan total *objective function*.
- Isi **By changing variable cells** dengan kode cell yang berisi nilai *decision variable*.
- Pilih **Simple LP** untuk opsi **Select a Solving Method**
- Tambahkan *constraint (functional dan signed constraint)* menggunakan tombol **Add**.
- Jalankan solver dengan menekan tombol **Solve**.

The screenshot shows the 'Solver Parameters' dialog box with the following settings:

- Set Objective:** \$D\$10
- To:** ☒ Max ☐ Min ☐ Value Of: 0
- By Changing Variable Cells:** \$B\$13:\$C\$13
- Subject to the Constraints:**
 - \$B\$13 >= 0
 - \$C\$13 >= 0
 - \$D\$11 <= 200
 - \$D\$12 <= 40
- ☒ **Make Unconstrained Variables Non-Negative**
- Select a Solving Method:** Simplex LP
- Solving Method:** Select the GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. Select the LP Simplex engine for linear Solver Problems, and select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.

Buttons at the bottom: Help, Solve, Close.

Solusi Contoh 1: Software - Add ins Solver pada Ms. Excel

- Setelah solver dijalankan, nilai variabel x dan y akan terisi. Selain itu, solver juga akan menghitung *objective value* terbaik.
- Berdasarkan studi kasus ini, nilai optimum yang didapatkan adalah 35000000 ketika x = 50 dan y = 0.

	A	B	C	D	E
1	Objective function:				
2	$\max f(x,y) = z = 70000x + 50000y$				
3	Constraints:				
4	• $4x + 3y \leq 200$ (jam kerja pembuatan)				
5	• $0.5x + 0.75y \leq 40$ (jam kerja pengecatan)				
6	• $x \geq 0$				
7	• $y \geq 0$				
8					
9		x	y	Total	Batas
10	Keuntungan per unit	70000	50000	3500000	
11	Constraint 1 ($4x+3y \leq 200$)	4	3	200	200
12	Constraint 2 ($0.5x+0.75y \leq 40$)	0,5	0,75	25	40
13		50	0		



Software - Library `scipy.optimize` (Python)

- Salah satu library pada bahasa pemrograman Python, yakni `scipy.optimize`, menyediakan fungsi `linprog` yang bertujuan untuk menyelesaikan suatu permasalahan LP.
- Karena `scipy` merupakan external library, maka user perlu melakukan import library tersebut sebelum menggunakan fungsi `linprog()`.
- Secara default, fungsi `linprog()` melakukan menyelesaikan fungsi objektif yang bersifat minimisasi. Oleh karena itu, kita perlu merubah bentuk fungsi objektif tsb menjadi negatif dengan cara mengalikan dengan nilai -1.

Solusi Contoh 1: Software Library `scipy.optimize` (Python)



```
1 from scipy.optimize import linprog
2
3 # Definisikan koefisien fungsi objektif (Max Z = 70000x + 50000y)
4 c = [-70_000, -50_000] # Negatif karena linprog melakukan minimisasi
5
6 # Koefisien constraint
7 A = [[4, 3], # 4x + 3y <= 200
8      [0.5, 0.75]] # 0.5x + 0.75y <= 40
9 b = [200, 40]
10
11 # Batasan non-negatif
12 x_bounds = (0, None)
13 y_bounds = (0, None)
14
15 # Gunakan linprog untuk mencari solusi optimal
16 result = linprog(c, A_ub=A, b_ub=b, bounds=[x_bounds, y_bounds], method='highs')
17
18 # Menampilkan hasil
19 x_opt, y_opt = result.x
20 optimal_value = -result.fun # Karena fungsi objektif awal adalah maksimisasi
21
22 print(f"Solusi optimal: x = {x_opt:.2f}, y = {y_opt:.2f}")
23 print(f"Nilai optimal Z: {optimal_value:.2f}")
24
```



Solusi optimal: x = 50.00, y = 0.00
Nilai optimal Z: 3500000.00

Solusi Contoh 2: Software Library `scipy.optimize` (Python)

```
1 from scipy.optimize import linprog
2
3 # Koefisien objective function (karena linprog meminimalkan, kita gunakan -1 untuk maksimasi)
4 c = [-7500, -4250]
5
6 # Koefisien constraint
7 A = [[1, 1], # x1 + x2 <= 18
8      [-1, -1]] # x1 + x2 >= 10 (ditulis sebagai -x1 - x2 <= -10)
9
10 # Batasan dari masing-masing constraint
11 b = [18, -10]
12
13 # Batasan variabel (x1 >= 5, x2 >= 3)
14 x_bounds = [(5, None), (3, None)]
15
16 # Menyelesaikan LP
17 result = linprog(c, A_ub=A, b_ub=b, bounds=x_bounds, method='highs')
18
19 # Menampilkan hasil
20 x1_opt, x2_opt = result.x
21 optimal_value = -result.fun # Karena fungsi objektif awal adalah maksimisasi
22
23 print(f"Solusi optimal: x1 = {x1_opt:.2f}, x2 = {x2_opt:.2f}")
24 print(f"Nilai optimal Z: {optimal_value:.2f}")
```

⇒ Solusi optimal: x1 = 15.00, x2 = 3.00
Nilai optimal Z: 125250.00



Software - Library `pulp` (Python)

- Selain menggunakan `scipy.optimize`, kita juga bisa menggunakan library `pulp` untuk memodelkan dan menyelesaikan suatu permasalahan LP.
- Karena `pulp` merupakan external library, maka user perlu melakukan import dan install library tersebut sebelum menggunakan fungsi `solve()`.
- Untuk menyelesaikan fungsi objektif yang bersifat maksimisasi, kita bisa melakukan set parameter `sense` dengan `LpMaximize`.
- Sebaliknya, untuk menyelesaikan fungsi objektif yang bersifat minimisasi, kita bisa melakukan set parameter `sense` dengan `LpMinimize`.

Solusi Contoh 1: Software Library pulp (Python)



```
1 from pulp import LpMaximize, LpProblem, LpVariable
2
3 # Definisikan model LP
4 model = LpProblem(name="production_optimization", sense=LpMaximize)
5
6 # Definisikan variabel keputusan
7 x = LpVariable(name="Meja", lowBound=0, cat='Integer')
8 y = LpVariable(name="Kursi", lowBound=0, cat='Integer')
9
10 # Tambahkan fungsi objektif (Maksimasi profit)
11 model += 70000*x + 50000*y, "Total_Profit"
12
13 # Tambahkan batasan
14 model += 4*x + 3*y <= 200, "Jam_kerja_pembuatan"
15 model += 0.5*x + 0.75*y <= 40, "Jam_kerja_pengecatan"
16
17 # Jalankan optimasi
18 model.solve()
19
20 # Tampilkan hasil
21 for var in model.variables():
22     print(f"{var.name}: {var.varValue}")
23
24 print(f"Maximum Profit: Rp. {model.objective.value()}")
25
```



```
Kursi: 0.0
Meja: 50.0
Maximum Profit: Rp. 3500000.0
```

Solusi Contoh 2: Software Library pulp (Python)

```
1 from pulp import LpMaximize, LpProblem, LpVariable
2
3 # Definisikan model LP
4 model = LpProblem(name="production_optimization", sense=LpMaximize)
5
6 # Definisikan variabel keputusan
7 x1 = LpVariable(name="Product I", lowBound=5, cat='Integer')
8 x2 = LpVariable(name="Product II", lowBound=3, cat='Integer')
9
10 # Tambahkan fungsi objektif (Maksimasi profit)
11 model += 7500*x1 + 4250*x2, "Total_Profit"
12
13 # Tambahkan batasan
14 model += x1 + x2 >= 10, "Total_produk_min"
15 model += x1 + x2 <= 18, "Total_produk_max"
16
17 # Jalankan optimasi
18 model.solve()
19
20 # Tampilkan hasil
21 for var in model.variables():
22     print(f"{var.name}: {var.varValue}")
23
24 print(f"Maximum Profit: Rp. {model.objective.value()}")
25
```

```
➡ Product_I: 15.0
   Product_II: 3.0
   Maximum Profit: Rp. 125250.0
```



Kelebihan dan kekurangan metode penyelesaian LP

	Metode Simplex	Metode Grafik
Kelebihan	• Dapat menangani banyak <i>decision variable</i> dan <i>constraints</i>. • Efisien dalam menemukan solusi optimal.	• Mudah dipahami dan divisualisasikan untuk 2 variabel. • Cocok untuk tujuan pembelajaran dan demonstrasi konsep.
Kekurangan	• Perhitungan bisa menjadi kompleks secara manual untuk masalah besar. • Tidak selalu optimal untuk masalah dengan banyak batasan khusus seperti variabel integer.	• Hanya bisa digunakan untuk masalah dengan dua variabel keputusan. • Tidak praktis untuk masalah LP dengan banyak variabel.



Kelebihan dan kekurangan metode penyelesaian LP

	Solver di Excel (Simplex Solver)	Python (Scipy/Pulp)
Kelebihan	• Mudah digunakan tanpa perlu coding atau pemrograman tambahan.	• Fleksibel dan mampu menangani LP kompleks dengan berbagai metode.
Kekurangan	• Kurang fleksibel dibandingkan pemrograman berbasis kode seperti Python.	• Memerlukan pemahaman pemrograman dasar untuk implementasi.



Kelebihan dan kekurangan LP

1	Kelebihan	• Dapat menyelesaikan masalah optimasi yang bersifat linear, deterministik, dan memiliki keterbatasan sumber daya. • Solusi optimal dapat ditemukan secara sistematis dan efisien. • Dapat menyelesaikan masalah dengan banyak variabel menggunakan metode Simplex.
2	Kekurangan	• Hanya dapat menangani hubungan yang linear. • Tidak memperhitungkan faktor ketidakpastian dalam kondisi dunia nyata



Referensi

- <https://www.youtube.com/watch?v=9YKLXFqCy6E>
- <https://people.richland.edu/james/ictcm/2006/3dsimplex.html>
- https://lmsspada.kemdiktisaintek.go.id/pluginfile.php/79162/mod_resource/content/2/M-3-linear-programming-metode-simplex.pdf
- https://docs.google.com/spreadsheets/d/1vr0Q-ygE_gZvk9jMfl3DeD0loDIJEhB6/edit?usp=drive_link&ouid=105181683848871846376&rtpof=true&sd=true